Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Instytut Matematyki

Rozprawa doktorska

Ergodyczne własności losowych układów dynamicznych ze skokami o intensywności zależnej od stanu

Joanna Kubieniec

Promotor: prof. dr hab. KATARZYNA HORBACZ
Promotor pomocniczy: dr DAWID CZAPLA

13 września 2019

Spis treści

Wstęp

W niniejszej rozprawie badamy ergodyczne własności pewnych stochastycznych układów dynamicznych, dających się opisać przy pomocy łańcuchów Markowa o wartościach w dowolnej, niekoniecznie lokalnie zwartej, metryzowalnej przestrzeni polskiej. Narodziny teorii operatorów Markowa przypadają na początek XX wieku. Wówczas to A.A. Markow opisał pewne terminy probabilistyczne wykorzystując rachunek macierzowy. Następnie, w 1952 roku, W. Feller zaczął rozważać operatory Markowa działające na przestrzeni miar. Niewątpliwy wkład w rozwój tej teorii wnieśli A. Lasota oraz T. Szarek, badając między innymi asymptotyczną stabilność operatorów, najpierw na lokalnie zwartych i $\sigma-$ zwartych przestrzeniach metrycznych, a następnie na przestrzeniach polskich (zob. [21, 25, 28, 34–38]). Opracowane przez nich metody i uniwersalne kryteria stabilności znalazły zastosowanie między innymi w teorii stochastycznych równań różniczkowych (zob. [14, 25, 26]), w teorii iterowanych układów funkcyjnych, fraktali i semifraktali (zob. [6, 21, 24, 27, 35, 39]), jak również w modelach biomatematycznych (zob. [8, 23, 29, 30]).

Przedmiotem rozważań niniejszej rozprawy będzie analiza asymptotyki operatora Markowa, działającego na miarach przestrzeni polskiej, determinującego ewolucję rozkładów jednorodnego łańcucha Markowa opisującego stany pojawiające się w bezpośrednim następstwie skoków pewnego kawałkami deterministycznego procesu Markowa (z ang. PDMP; por. [1,4]). W każdym przedziale czasu pomiędzy dwoma kolejnymi skokami, ów proces, stanowiący notabene interpolację rozważanego łańcucha, ewoluuje w sposób deterministyczny, wyznaczony przez pewien potok, wybrany losowo (ze skończonego zbioru) w momencie skoku poprzedzającego tę ewolucję. Same skoki, występujące w losowych odstępach czasu, realizowane są poprzez zadany zbiór transformacji ciągłych, losowanych z prawdopodobieństwami zależnymi od obecnego stanu układu.

Procesy tego typu (badane np. w [7–9, 15, 16]) wykorzystuje się głównie w modelach biologicznych związanych z ekspresją genu (zob. [8, 30]). Szczególny przypadek rozważanego tu łańcucha Markowa, stanowiącego bazę interpolacji dla wspomnianego PDMP, pojawia się również w modelu cyklu komórkowego [23]. Podobny układ dynamiczny, w nieco ogólniejszej postaci (w którym wartość transformacji determinującej skok poddawana jest dodatkowo addytywnej perturbacji), zastosowano również do konstrukcji pewnego dyskretnego modelu ekspresji genu uwzględniającego zjawisko autoregulacji, tj. wpływu produktu genu na jego własną ekspresję (zob. [13]). Warto również zaznaczyć, iż przestrzenią fazową w tym ostatnim modelu jest przestrzeń funkcji ciagłych na pewnym domkniętym zbiorze ograniczonym, która jako przestrzeń nieskończeniewymiarowa nie jest lokalnie zwarta. Obserwacja ta świadczy o zasadności badania układów dynamicznych na przestrzeniach polskich i ukazuje przydatność otrzymanych w tym przypadku wyników w kontekście zastosowań.

W odróżnieniu od prac [7–9, 15, 16], intensywność skoków w rozpatrywanym przez nas modelu zależna będzie od obecnego stanu układu. Wyniki zawarte we wspomnianych pracach obejmują bowiem przypadek, w którym przedziały czasu między skokami mają jednakowy rozkład wykładniczy o stałej intensywności λ. Takie założenie może okazać się jednak nazbyt restrykcyjne z punktu widzenia niektórych zastosowań. Na przykład, we wspomnianym już modelu ekspresji genu, odstęp czasu między kolejnymi "skokami", tożsamymi z momentami transkrypcji białka (ang. bursts), w rzeczywistości zależny jest od aktualnej ilości produktu genowego (zob. [30]). Takie spojrzenie uwidacznia poniekąd istotę podjętej analizy, w którym parametr λ jest funkcją stanu układu x.

Naszym celem będzie przedstawienie dwóch różnych metod prowadzących do wykazania ergodyczności rozważanego operatora Markowa w metryce Fortet $-$ Mouriera (znanej również jako *dual Bounded Lipschitz distance* lub *flat metric*; zob. [3, 11, 22]), która w zbiorze miar nieujemnych indukuje topologię słabej zbieżności miar.

Mianowicie, bazując na koncepcjach nierozszerzalności i semikoncentracji odgrywających kluczową rolę m.in w pracach T. Szarka [35, 36] udowodnimy, iż rozważany operator jest asymptotycznie stabilny, co oznacza że odpowiadający mu łańcuch Markowa posiada dokładnie jeden rozkład stacjonarny, a rozkłady tego łańcucha (w kolejnych jednostkach czasu) zbiegają do niego w metryce Fortet–Mouriera, niezależnie od wyboru rozkładu początkowego. Własność ta bywa również nazywana ergodycznością operatora (łańcucha) w metryce Forter-Mouriera. Część pracy poświęcona temu zagadnieniu stanowi adaptację wyników zawartych w artykule [20]. Podobne rezultaty czytelnik może również znaleźć np. w pracach [15, 28, 34]. W drugiej części rozprawy, opartej na artykule [10], wykażemy natomiast (nakładając nieco silniejsze założenia na rozważany zbiór potoków), iż wspomniana zbieżność rozkładów łańcucha do miary niezmienniczej następuje w tempie geometrycznym. W tym celu, posłużymy się techniką sprzęgania łańcuchów Markowa (ang. coupling), zainicjowaną przez M. Hairera w pracy [12] (i podjętą również w artykule [18]). Technika ta polega na sparowaniu dwóch kopii rozważanego łańcucha Markowa w taki sposób, aby funkcja przejścia otrzymanego łańcucha sprzęgającego zawierała pewien łatwy w indentyfikacji (i dający się wyrazić jawnym wzorem) komponent, który z jednej strony powoduje zbliżanie się do siebie kopii łańcucha, a z drugiej, odgrywa „dominującą rolę" w determinacji prawdopodobieństw przejść łańcucha sparowanego.

Warto podkreślić, iż klasyczne metody dowodzenia ergodyczności w normie wahania całkowitego dla tzw. łańcuchów ψ $-$nieprzywiedlnych (por. [1, 5, 31], zainicjowane przez S.P. Meyna i R. L. Tweedie'go (jak np. [31, Theorem 16.1.2]), zwykle nie sprawdzają się w przypadku braku założenia lokalnej zwartości przestrzeni fazowej. Wykazanie istnienia odpowiedniej miary ψ wymaga wówczas bardzo restrykcyjnych założeń, jak np. mocna własność Fellera. Co więcej, pojawia się również problem z identyfikacją tzw. zbiorów "drobnych" (ang. *petite sets*). Takimi powinny być np. zbiory podpoziomicowe $\{V \leqslant n\}$ funkcji dryftu V w kryterium Fostera–Lyapunowa (zob. [31, Theorem 16.1.2]), zapewniającym geometryczną ergodyczność operatora w normie całkowitego wahania. Jeżeli miara ψ ma niepusty nośnik, to zbiory drobne stanowią podklasę zbiorów zwartych (zob. [31, Proposition 6.2.8 (ii)]), a zatem wspomniany warunek drobności podpoziomic trywializuje się np. w przypadku gdy przestrzenią fazową jest $\mathbb{R}^n$. Lokalna zwartość przestrzeni (przy założeniu wspomnianego wyżej związku między drobnością i zwartością) pozwala również na stosunkowo łatwą weryfikację tzw. powracalności w sensie Harrisa (zob. [31, Theorems 9.2.2 i 9.4.1]), która zapewnia ergodyczność w zakresie łańcuchów nieokresowych posiadających rozkład stacjonarny (por. [31, Theorem 13.3.3]).

Niniejsza rozprawa składa się z trzech rozdziałów. W pierwszym z nich wprowadzamy notację oraz formułujemy podstawowe pojęcia i fakty, związane głównie z teorią operatorów Markowa, którymi posługujemy się w dalszej części pracy.

W rozdziale drugim przedstawiamy formalny opis i podstawowe założenia dla rozważanego modelu. Następnie w paragrafach 2.1 i 2.2 formułujemy i dowodzimy główne rezultaty niniejszej pracy, tj. odpowiednio asymptotyczną stabilność operatora przejścia dla rozważanego układu dynamicznego oraz wyznaczamy geometryczne tempo zbieżności rozkładów łańcucha do jego miary niezmienniczej w metryce Fortet$-$Mouriera. Dodatkowo, bazując na prawie wielkich liczb A. Shirikyana [32], udawadniamy mocne prawo wielkich liczb dla rozważanego łańcucha.

Ostatni rozdział ilustruje zastosowanie wyniku stanowiącego zwieńczenie paragrafu 2.2 w analizie geometrycznej ergodyczności operatora Markowa związanego z pewną wersją stochastycznego równania różniczkowego Poissona (ang. Poisson driven stochastic differential equation (PDSDE)), będącą uogólnieniem modeli rozważanych w pracach K. Horbacz [14] oraz J. Kazak [19]. Mianowicie, dla ustalonej losowej miary liczącej Poissona $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(dt, d\theta)$ oraz danych funkcji a, σ, λ rozważamy równanie postaci

$$dY(t) = a\left(Y(t), \xi(t)\right) dt + \int_\Theta \sigma(Y(t), \theta) \mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(dt), d\theta)$$

z warunkiem początkowym

$$Y(0) = Y_0,$$

gdzie

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(Y(s))ds,$$
$$\xi(t) = \xi_n \quad \text{dla} \quad \mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(t), \Theta) = n,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

$\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest szukanym procesem o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Hilberta, a $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ciągiem zmiennych losowych przyjmujących skończoną liczbę wartości o rozkładach warunkowych zależnych od realizacji procesu $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Przy odpowiednich założeniach o funkcji a, przekładających się na pewne szczególne własności potoków generowanych przez układy dynamiczne $y'(t) = a(y(t), i)$, rozwiązaniem powyższego równania jest PDMP wpisujący się w klasę procesów rozważanych w pracy. Główne twierdzenie w omawianym rozdziale zawiera warunki odnoszące się do współczynników równania oraz funkcji λ, które zapewniają spełnienie założeń wyszczególnionych w paragrafie 2.2, a tym samym geometryczną ergodyczność rozważanego łańcucha Markowa.

1 Prelimenaria

1.1 Notacja oraz podstawowe pojęcia i fakty

W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wyróżniamy podzbiory: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ oraz $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Niech (E, ρ) będzie przestrzenią polską, tzn. ośrodkową i zupełną przestrzenią metryczną, a $\mathcal{B}(E)$ σ $-$ciałem borelowskich podzbiorów przestrzeni E. Dla każdego zbioru $A \subset E$ symbolem $\mathrm{diam}_\rho A$ oznaczymy średnicę zbioru A. Indykator zbioru $A \subset E$ oznaczamy symbolem $\mathbb{1}_A$ i definiujemy jako funkcję

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A, \\ 0 & \text{dla } x \in E \backslash A. \end{cases}$$

Symbolem δ_x będziemy oznaczać miarę Diracka w punkcie $x \in E$, to jest

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A, \\ 0 & \text{dla } x \in E \backslash A. \end{cases}$$

Standardowo $B(x, r)$, $\overline{B}(x, r)$ oznaczać będzie kulę odpowiednio otwartą i domkniętą o środku w punkcie $x \in E$ i promieniu $r > 0$. Ponadto wprowadzamy następujące oznaczenia:

- $B(E)$ $-$ przestrzeń liniowa ograniczonych funkcji borelowskich na E o wartościach rzeczywistych z normą supremum $||\cdot||$;
- $C(E)$ $-$ podprzestrzeń przestrzeni $B(E)$ złożona z funkcji ciągłych;
- $\mathcal{M}_s(E)$ $-$ przestrzeń wszystkich skończonych i przeliczalnie addytywnych funkcji na $\mathcal{B}(E)$.

Dla zwięzłości zapisu przyjmujemy oznaczenie:

$$\langle f, \mu \rangle = \int_E f(x)\mu(dx) \quad \text{dla } f \in B(E),\ \mu \in \mathcal{M}_s(E).$$

Przestrzeń $\mathcal{M}_s(E)$ będziemy rozważać z *normą Fortet–Mouriera* $||\cdot||_{FM}$ (zob. [22]), określoną wzorem

$$||\mu||_{FM} = \sup\{|\langle f, \mu \rangle| : f \in \mathcal{F}^\rho_{FM}(E)\} \quad \text{dla } \mu \in \mathcal{M}_s(E),$$

gdzie

$$\mathcal{F}^\rho_{FM}(E) = \{f \in C(E) : ||f|| \leqslant 1 \text{ oraz } |f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x, y) \ \text{ dla } x, y \in E\}.$$

W zbiorze $\mathcal{M}_s(E)$ wyróżniamy następujące podzbiory:

- $\mathcal{M}(E)$ – zbiór miar nieujemnych;
- $\mathcal{M}_1(E)$ – zbiór miar probabilistycznych;
- $\mathcal{M}_1^A(E)$ – zbiór miar probabilistycznych skoncentrowanych na zbiorze A, to jest miar $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, które dla ustalonego zbioru $A \in \mathcal{B}(E)$ spełniają warunek $\mu(A) = 1$;
- $\mathcal{M}_1^{\rho,1}(E)$ – miar probabilistycznych z pierwszym momentem skończonym, to jest takich miar $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, że $\int_E \rho(x, x_*)\mu(dx) < \infty$ dla pewnego $x_* \in E$.

Definicja 1.1. Niech $\mu, \mu_n \in \mathcal{M}(E)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że ciąg $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zbiega słabo* do miary μ, co oznaczamy przez $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, gdy dla każdej funkcji $f \in C(E)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, \mu_n \rangle = \langle f, \mu \rangle.$$

Można pokazać (zob. [22]), że słaba zbieżność miar probabilistycznych jest równoważna zbieżności w normie Fortet–Mouriera, czyli

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow ||\mu_n - \mu||_{FM} \to 0.$$

W [22] można również znaleźć dowód poniżej cytowanego twierdzenia Aleksandrowa.

Twierdzenie 1.2. *[22, Twierdzenie 1.37.] Niech $\mu, \mu_n \in \mathcal{M}_1(E)$, $n \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są równoważne:*

i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$;

ii) $\lim_{n\to\infty}\langle f, \mu_n \rangle = \langle f, \mu \rangle$ *dla każdej funkcji* $f \in \mathcal{F}_{FM}^{\rho}(E)$;

iii) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$ *dla dowolnego zbioru domkniętego* $F \subset E$;

iv) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geqslant \mu(U)$ *dla dowolnego zbioru otwartego* $U \subset E$;

v) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ *dla dowolnego zbioru borelowskiego* $B \subset E$*, którego* $\mu(\sigma B)$*=0.*

Powyższe twierdzenie pojawia się również w [2], jednak w nieco słabszej wersji, w której warunek *ii)* sformułowany jest dla funkcji jednostajnie ciągłych i ograniczonych przez 1.

Definicja 1.3. Rodzinę miar $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(E)$ nazywamy *ciasną*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór zwarty $K \subset E$, że $\mu(K) \geqslant 1 - \varepsilon$ dla każdego $\mu \in \mathcal{A}$.

Funkcję ciągłą $V : E \to \mathbb{R}_+$ nazywamy *funkcją Lapunowa*, jeżeli jest ona ograniczona na zbiorach ograniczonych oraz dla pewnego $x_0 \in E$

$$\lim_{\rho(x,x_0)\to\infty} V(x) = \infty.$$

Definicja 1.4. Niech będą dane funkcje $\pi_{ij} : E \to [0,1]$ dla $i,j \in \{1,\ldots,N\}$, $N \in \mathbb{N}$. Mówimy, że $[\pi_{ij}]_{i,j}$ jest *macierzą prawdopodobieństw*, jeżeli

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_{ij}(x) = 1 \quad \text{dla } x \in E \text{ oraz } i \in \{1,\ldots,N\}.$$

W naszych rozważaniach ważną rolę będzie pełnił zbiór Φ, złożony ze wszystkich funkcji $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniających następujące warunki:

a) φ są ciągłe oraz $\varphi(0) = 0$,

b) φ są niemalejące oraz wklęsłe,

c) $\varphi(x) > 0$ dla $x > 0$ oraz $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$.

Jedną z najistotniejszych własności funkcji $\varphi \in \Phi$ jest to, że złożenie dowolnej metryki ρ z funkcją φ jest również metryką na E. Wynika to z faktu, że powyższe założenia gwarantują poddadytywność funkcji należących do zbioru Φ, co gwarantuje iż odwzorowanie $\varphi \circ \rho$ spełnia warunek trójkąta dla każdej funkcji $\varphi \in \Phi$. Symbolem Φ_0 znaczamy podzbiór rodziny Φ utworzony przez funkcje $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniające warunki a) oraz b).

W ciągu dalszych roważań będziemy również korzystać z następującego twierdzenia, którego dowód znajduje się w [28].

Twierdzenie 1.5. *Niech $\omega \in \Phi_0$ spełnia warunek Diniego, to jest*

$$\int_0^\varepsilon \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty \quad \textit{dla pewnego } \varepsilon \in (0,\infty) \tag{1.1}$$

oraz niech $a \in [0,1)$. Wówczas istnieje $\varphi \in \Phi$, dla którego zachodzi nierówność

$$\omega(t) + \varphi(at) \leqslant \varphi(t) \quad \textit{dla } t \in \mathbb{R}_+.$$

1.2 Operatory Markowa

Przejdziemy teraz do przedstawienia ważniejszych definicji i pojęć związanych z teorią operatorów Markowa.

Definicja 1.6. Odwzorowanie $(\cdot)P : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(E)$, która spełnia następujące warunki:

i) $(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)P = \alpha(\mu_1 P) + \beta(\mu_2 P) \quad \text{dla } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(E)$,

ii) $\mu P(E) = \mu(E) \quad \text{dla } \mu \in \mathcal{M}(E)$

nazywamy *operatorem Markowa.*

Definicja 1.7. Operator $P(\cdot) : B(E) \to B(E)$ nazywamy *operatorem dualnym* dla operatora Markowa $(\cdot)P$, gdy zachodzi

$$\langle Pf, \mu \rangle = \langle f, \mu P \rangle \quad \text{dla } f \in B(E) \text{ oraz } \mu \in \mathcal{M}(E).$$

Operator Markowa $(\cdot)P$, dla którego istnieje operator dualny $P(\cdot)$ nazywamy *operatorem regularnym.*
Regularny operator Markowa P nazywamy *operatorem Fellera* lub po prostu *fellerowskim*, jeżeli jego operator dualny P zachowuje ciągłość tzn.

$$P(C(E)) \subset C(E).$$

Definicja 1.8. Funkcję $Q : E \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ nazywamy *jądrem podstochastycznym*, gdy spełnia następujące warunki:

i) dla każdego $A \in \mathcal{B}(E)$, odwzorowanie $Q(\cdot, A) : E \to [0, 1]$ jest borelowskie,

ii) dla każdego $x \in E$, odwzorowanie $Q(x, \cdot) : \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ jest miarą borelowską.

Jeżeli dodatkowo, dla każdego $x \in E$, odwzorowanie $Q(x, \cdot) : \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ jest miarą probabilistyczną, to funkcję Q nazywamy *jądrem stochastycznym.*

Przez złożenie jąder (pod)stochastycznych $Q, R : E \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ rozumiemy jądro (pod)stochastyczne dane wzorem:

$$QR(x, A) = \int_E Q(y, A) R(x, dy) \quad \text{dla } x \in E,\ A \in \mathcal{B}(E).$$

Wówczas iterację P^n $(n \in \mathbb{N})$ jądra $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ definiujemy wzorami:

$$P^1 = P,\ P^{n+1} := P^n P \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

otrzymując tzw. *uogólnionione równanie Chapmana–Kołmogorowa* postaci:

$$P^{n+m}(x, A) = \int_E P^n(y, A) P^m(x, dy) \quad \text{dla } n, m \in \mathbb{N},\ x \in E,\ A \in \mathcal{B}(E).$$

Dla każdego jądra stochastycznego $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ możemy zdefiniować operatory $(\cdot)P : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(E)$ oraz $P(\cdot) : B(E) \to B(E)$ przyjmując

$$\mu P(A) = \int_E P(x,A)\mu(dx) \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}(E),\ \mu \in \mathcal{M}(E) \tag{1.2}$$

oraz

$$Pf(x) = \int_E f(y)P(x,dy) \quad \text{dla } f \in B(E),\ x \in E. \tag{1.3}$$

Oczywiście $(\cdot)P$ jest wówczas regularnym operatorem Markowa, a $P(\cdot)$ jest jego operatorem dualnym. Ponadto, dla każdego $x \in E$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$ zachodzą równości:

$$P(x,A) = P\mathbb{1}_A(x) = \delta_x P(A).$$

Operator $P(\cdot)$ można z łatwością rozszerzyć na przestrzeń wszystkich funkcji ograniczonych z dołu, zachowując przy tym warunek dualności.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, prob)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla każdego jądra stochastycznego P oraz ustalonej miary $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ można zdefiniować jednorodny łańcuch Markowa $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, dla którego miara μ jest rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej X_0, a $P(x,A)$ jest prawdopodobieństwem przejścia tego łańcucha z danego punktu x do danego zbioru A w pojedynczym kroku, czyli

$$prob(X_0 \in A) = \mu(A) \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}(E),$$

$$P(x,A) = prob(X_{n+1} \in A | X_n = x) \quad \text{dla } x \in E,\ A \in \mathcal{B}(E),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Jądro P nazywane jest wówczas *funkcją przejścia* dla operatora $(\cdot)P$ (i oznaczane jest tą samą literą).

Odnotujmy w tym miejscu, że $P^n(x,A)$ jest prawdopodobieństwem przejścia łańcucha ze stanu x do zbioru A w n krokach. Sam operator Markowa $(\cdot)P$ opisuje ewolucję rozkładów łańcucha $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ w czasie, tzn. jeśli μ_n jest rokładem zmiennej X_n, to $\mu_n P$ jest rozkładem zmiennej X_{n+1}.

Symbolem $\mathbf{E}_x$ oznaczamy wartość oczekiwaną względem prawdopodobieństwa

$$prob_x(\cdot) := prob(\cdot | X_0 = x).$$

Definicja 1.9. Niech $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ będzie dowolnym jądrem stochastycznym, a $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ łańcuchem Markowa o funkcji przejścia zadanej przez P. Wówczas dowolny łańcuch Markowa $\{(X_n^1, X_n^2)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ o przestrzeni stanów E^2 i funkcji przejścia $B : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$ spełniającej warunki:

$$B(x,y,A\times E) = P(x,A) \quad \text{oraz} \quad B(x,y,E\times A) = P(y,A) \quad \text{dla } x,y \in E,\ A \in \mathcal{B}(E) \tag{1.4}$$

nazywamy *łańcuchem sprzęgającym* (ang. coupling) kopie łańcucha $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Jądro stochastyczne B spełniające (1.4) będziemy nazywać krótko *jądrem sprzęgającym* dla P.

Uwaga 1.10. Przypuśćmy, że dane jest jądro stochastyczne $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ oraz jądro podstochastyczne $Q : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$ spełniające następujące warunki:

$$Q(x,y,A\times E) \leqslant P(x,A) \quad \text{oraz} \quad Q(x,y,E\times A) \leqslant P(y,A) \tag{1.5}$$

dla każdego $x,y \in E$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$. Wówczas możemy skonstruować jądro sprzęgające dla P spełniające nierówność $Q \leqslant B$. Istotnie, zdefiniujmy rodzinę miar $\{R(x,y,\cdot) : x,y \in E\}$ kładąc dla każdego zbioru $A \times B \in \mathcal{B}(E^2)$

$$R(x,y,A\times B) = \frac{1}{1-Q(x,y,E^2)}(P(x,A) - Q(x,y,A\times E))(P(y,B) - Q(x,y,E\times B))$$

jeżeli $Q(x,y,E^2) < 1$ oraz $R(x,y,A\times B) = 0$, gdy $Q(x,y,E^2) = 1$. Wówczas $B := Q + R$ jest jądrem sprzęgającym dla P oraz $Q \leqslant B$.

1.3 Asymptotyczna stabilność

Na pojęcie asymptotycznej stabilności operatora Markowa składają się dwie własności: istnienie probabilistycznej miary niezmienniczej oraz zbieżność dla dowolnej miary probabilistycznej ciągu iteracji operatora do tej właśnie miary.

Definicja 1.11. Niech $\mu_* \in \mathcal{M}_1(E)$. Miarę μ_* nazywamy *niezmienniczą* dla operatora Markowa $(\cdot)P : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(E)$, jeżeli

$$\mu_* P = \mu_*.$$

Definicja 1.12. Operator Markowa $(\cdot)P$ nazywamy *asymptotycznie stabilnym*, gdy posiada miarę niezmienniczą μ_* oraz

$$\lim_{n\to\infty} ||\mu P^n - \mu_*||_{FM} = 0 \quad \text{dla wszystkich } \mu \in \mathcal{M}_1(E).$$

W kontekście jednorodnych łańcuchów Markowa, miara niezmiennicza operatora $(\cdot)P$ jest rozkładem stacjonarnym łańcucha o funkcji przejścia P. Jeśli tylko miara ta stanowi rozkład początkowy takiego łańcucha, to łańcuch ten jest stacjonarny. Asymptotyczna stabilność operatora $(\cdot)P$ gwarantuje zatem istnienie rozkładu stacjonarnego dla łańcucha Markowa o funkcji przejścia P oraz zapewnia, iż jego rozkłady będą zbliżać się do niej, niezależnie od rozkładu początkowego. Jeśli łańcuch Markowa opisuje dynamikę pewnego procesu w przyrodzie (np. podział komórek bakterii), to asymptotyczna stabilność oznacza, że z biegiem czasu opisywany układ (np. populacja komórek) stabilizuje się (np. ze względu na funkcję czy strukturę komórek) w kierunku pewnego "stanu równowagi", niezależnie od tego jakie były warunki początkowe.

Uwaga 1.13. Jeżeli istnieje miara $\mu_* \in \mathcal{M}_1(E)$ niezmiennicza dla operatora Markowa $(\cdot)P$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} ||\mu_1 P^n - \mu_2 P^n||_{FM} = 0 \quad \text{dla } \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(E),$$

to operator $(\cdot)P$ jest asymptotycznie stabilny.

Definicja 1.14. Operator Markowa $(\cdot)P$ nazwiemy *geometrycznie ergodycznym* względem normy $||\cdot||_{FM}$, gdy istnieje miara niezmiennicza $\mu_* \in \mathcal{M}_1^{\rho,1}(E)$ oraz taka stała $\beta \in [0,1)$, że dla każdej miary $\mu \in \mathcal{M}_1^{\rho,1}(E)$ oraz pewnej stałej $C(\mu) \in \mathbb{R}$ zachodzi warunek

$$||\mu P^n - \mu_*||_{FM} \leqslant C(\mu)\beta^n \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Jedną z własności mogących stanowić istotny punkt wyjścia w dowodzeniu asymptotycznej stabilności operatorów Markowa, jest ich nierozszerzalność. Poniższa definicja precyzuje to pojęcie.

Definicja 1.15. Operator Markowa $(\cdot)P$ nazywamy *nierozszerzającym*, gdy dla dowolnych miar $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(E)$

$$||\mu_1 P - \mu_2 P||_{FM} \leqslant ||\mu_1 - \mu_2||_{FM}.$$

Uwaga 1.16. Powyższą definicję możemy wyrazić równoważnie za pomocą operatora dualnego. Warunek nierozszerzalności przyjmie wtedy postać

$$|Pf(x) - Pf(y)| \leqslant \rho(x,y),$$

dla dowolnej $f \in \mathcal{F}_{FM}^{\rho}(E)$ oraz wszystkich $x, y \in E$.

Może się zdarzyć, że rozważany operator Markowa nie będzie nierozszerzający względem metryki Fortet–Mouriera zdefiniowanej przy użyciu zadanej metryki ρ w przestrzeni E. Wówczas porządaną nierozszerzalność możemy w niektórych przypadkach uzyskać zastępując metrykę ρ przez odpowiednią metrykę jej równoważną (zobacz [28]).

Symbolem $\mathcal{C}_\varepsilon(E)$, $\varepsilon \in (0,\infty)$ będziemy oznaczać rodzinę domkniętych zbiorów $C \subset E$, dla których istnieje taki skończony zbiór $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset E$, że $C \subset \bigcup_{i=1}^n B(z_i, \varepsilon)$.

Definicja 1.17. Operator Markowa $(\cdot)P$ nazywamy *semikoncentrującym*, jeżeli dla każdego $\varepsilon \in (0,\infty)$ istnieją takie $C \in \mathcal{C}_\varepsilon(E)$ oraz $\theta \in (0,\infty)$, że

$$\liminf_{n\to\infty} \mu P^n(C) > \theta \quad \text{dla } \mu \in \mathcal{M}_1(E).$$

Definicja 1.18. Operator Markowa $(\cdot)P$ nazywamy *globalnie koncentrującym*, jeżeli dla każdego $\varepsilon \in (0,\infty)$ oraz ograniczonego zbioru $A \in \mathcal{B}(E)$ istnieje taki zbiór ograniczony $B \in \mathcal{B}(E)$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$\mu P^n(B) \geqslant 1-\varepsilon \quad \text{dla } n \geqslant n_0,\ \mu \in \mathcal{M}_1^A(E).$$

Twierdzenie 1.19. *[36, Lemma 2.4.2, Corollary 2.4.1] Niech $(\cdot)P$ będzie regularnym operatorem Markowa oraz niech $P(\cdot)$ będzie jego operatorem dualnym. Jeżeli istnieje funkcja Lapunowa V oraz takie stałe $a \in (0,1)$, $b > 0$, że*

$$PV(x) \leqslant aV(x) + b \quad \textit{dla każdego } x \in E, \tag{1.6}$$

to operator $(\cdot)P$ jest globalnie koncentrujący. Ponadto, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki ograniczony zbiór $B \in \mathcal{B}(E)$, że

$$\liminf_{n\to\infty} \mu P^n(B) \geqslant 1-\varepsilon \quad \textit{dla } \mu \in \mathcal{M}_1(E).$$

Zdefiniujmy zbiór

$$E(P) = \{\varepsilon > 0 : \inf_{\mu\in\mathcal{M}_1(E)} \liminf_{n\to\infty} \mu P^n(C) > 0 \ \text{ dla pewnego } C \in \mathcal{C}_\varepsilon(E)\}.$$

Uwaga 1.20. Jeżeli operator Markowa jest globalnie koncentrujący, to $E(P)$ jest zbiorem niepustym.

Uwaga 1.21. Jeżeli $\inf E(P) = 0$, to operator Markowa $(\cdot)P$ jest semikoncentrujący.

W pracy [36] T. Szarek udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.22. *[36, Theorem 5.4] Niech $(\cdot)P$ będzie nierozszerzającym operatorem Markowa. Załóżmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\gamma > 0$ o następującej własności: dla dowolnych miar $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(E)$ istnieje zbiór ograniczony $A \in \mathcal{B}(E)$, którego $diam_\rho A \leqslant \varepsilon$ oraz takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że*

$$\mu_i P^{n_0}(A) > \gamma \quad \textit{dla } i = 1,2.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} ||\mu_1 P^n - \mu_2 P^n||_{FM} = 0 \quad \textit{dla } \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(E).$$

Uwaga 1.23. Przez wzgląd na uwagę 1.13, jeżeli do założeń powyższego twierdzenia dodamy założenie mówiące o tym, że operator $(\cdot)P$ posiada probabilistyczną miarę niezmienniczą, to możemy stwierdzić, że jest on asymptotycznie stabilny.

Rozważmy podzbiory $\mathcal{M}_1(E)$ postaci:

$$L(\mu) = \{\nu \in \mathcal{M}_1(E) : \exists_{\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}},\, n_k\to\infty} \lim_{k\to\infty} ||\mu P^{n_k} - \nu||_{FM} = 0\} \tag{1.7}$$

oraz

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1(E)) = \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_1(E)} L(\mu). \tag{1.8}$$

Twierdzenie 1.24. *[36, Theorem 5.5] Niech $(\cdot)P$ będzie nierozszerzającym i semikoncentrującym operatorem Markowa. Wówczas*

i) *$(\cdot)P$ ma probabilistyczną miarę niezmienniczą;*

ii) *$L(\mu) \neq \emptyset$, $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, gdzie $L(\mu)$ dane jest wzorem (1.7);*

iii) *rodzina $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1(E))$ dana wzorem (1.8) jest ciasna.*

Kolejne twierdzenie i lemat zostały sformułowane i udowodnione przez R. Kapicę i M. Ślęczkę w [18].

Twierdzenie 1.25. *[18, Theorem 2.1] Niech $(\cdot)P : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(E)$ będzie fellerowskim operatorem Markowa o tej własności, że*

(B1) *istnieje funkcja Lapunowa $V : E \to \mathbb{R}_+$ oraz stałe $a \in (0,1)$, $b > 0$ dla których zachodzi* (1.6).

Ponadto załóżmy, że dla pewnego jądra podstochastycznego $Q : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$, spełniającego (1.5), *oraz zbioru $F \subset E^2$ o tej własności, że* $\operatorname{supp} Q(x,y,\cdot) \subset F$ *dla wszystkich $(x,y) \in F$, zachodzą następujące warunki:*

(B2) *istnieje łańcuch sprzęgający $\{(X_n^1, X_n^2)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dla P, którego funkcja przejścia B, spełnia warunek $B \geqslant Q$ oraz dla pewnego $R > 0$ i zbioru*

$$K := \{(x,y) \in F : V(x) + V(y) < R\}$$

możemy dobrać takie stałe $\gamma \in (0,1)$ oraz $\overline{C} > 0$, że

$$\mathbf{E}_{(x,y)}(\gamma^{-\tau}) \leqslant \overline{C} \text{ dla każdych } x,y \in E \text{ takich, że } V(x) + V(y) < \frac{4b}{1-a},$$

gdzie

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : (X_n^1, X_n^2) \in K\};$$

(B3) *istnieje taka stała $q \in (0,1)$, że*

$$\int_{E^2} \rho(u,v) Q(x,y,du,dv) \leqslant q\rho(x,y) \quad dla\ (x,y) \in F.$$

(B4)

$$\inf\{Q(x,y,U(q\rho(x,y))\} : (x,y) \in F\} > 0$$

gdzie $U(r) = \{(u,v) : \rho(u,v) \leqslant r\}$ dla każdego $r > 0$;

(B5) *istnieją takie stałe $l > 0$ oraz $v \in (0,1]$, że*

$$Q(x,y,E^2) \geqslant 1 - l\rho(x,y)^v \quad dla\ (x,y) \in F.$$

Wówczas operator $(\cdot)P$ ma miarę niezmienniczą $\mu^* \in \mathcal{M}_1(E)$ oraz $\langle V, \mu^* \rangle < \infty$. Ponadto, istnieją takie stałe $\beta \in [0,1)$ oraz $C \in \mathbb{R}$, że

$$||\mu P^n - \mu^*||_{FM} \leqslant C\beta^n(\langle V, \mu + \mu^* \rangle + 1)$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz dowolnej $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ spełniającej warunek $\langle V, \mu \rangle < \infty$.

Lemat 1.26. *[18, Lemma 2.2] Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ będzie jednorodnym w czasie łańcuchem Markowa o funkcji przejścia P i przestrzeni fazowej E. Załóżmy, że operator $P(\cdot)$ dany wzorem* (1.3) *spełnia warunek* (1.6) *dla pewnej funkcji Lapunowa $V : E \to [0,\infty)$ oraz stałych $a \in (0,1)$ oraz $b > 0$. Wówczas, dla*

$$J = \left\{ x \in E : V(x) < \frac{2b}{1-a} \right\},$$

istnieją takie stałe $\gamma \in (0,1)$ oraz $C \in \mathbb{R}_+$, że

$$\mathbf{E}_x(\gamma^{-\rho_J}) \leqslant C(1 + V(x)) \quad dla\ x \in E,$$

gdzie $\rho_J = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in J\}$, $J \in \mathcal{B}(E)$.

Ostatnie twierdzenie w tej części pracy pochodzi z pracy A. Shirikyana [32], gdzie jest ono sformułowane dla łańcuchów Markowa o przestrzeni fazowej będącej przestrzenią Hilberta. Analiza dowodu tego twierdzenia pozwala stwierdzić, że twierdzenie to jest prawdziwe w przypadku, gdy rozpatrywana przestrzeń fazowa jest przestrzenią polską.

Twierdzenie 1.27. *[32, Theorem 2.1] Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ będzie jednorodnym w czasie łańcuchem Markowa o funkcji przejścia P i przestrzeni fazowej E. Niech ponadto*

($C1$) *operator Markowa* $(\cdot)P : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(E)$ *generowany przez funkcję przejścia* P *posiada miarę niezmienniczą* $\mu_* \in \mathcal{M}_1(E)$;

($C2$) *istnieje funkcja ciągła* $g : E \to \mathbb{R}_+$ *oraz taki ciąg nieujemnych liczb rzeczywistych* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, *że* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} k_n < \infty$ *oraz dla każdej ograniczonej funkcji lipschitzowskiej* $f : E \to \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$|P^n f(x) - \langle f, \mu_* \rangle| \leqslant k_n g(x)(||f|| + |f|_{Lip}) \quad dla\ x \in E,\ n \in \mathbb{N},$$

gdzie $|f|_{Lip}$ *jest najmniejszą stałą Lipschitza funkcji* f;

($C3$) *istnieje taka funkcja ciągła* $h : E \to \mathbb{R}_+$, *że*

$$\mathbf{E}_x(g(X_n)) \leqslant h(x) \quad dla\ x \in E,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Wówczas, dla każdej ograniczonej funkcji lipschitzowskiej $f : E \to \mathbb{R}$ *oraz* $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k, \xi_k) = \langle f, \mu_* \rangle \quad prob_x -\ p.n.$$

2 Opis modelu

Niech dane będą: przestrzeń polska (Y, ρ), przestrzeń topologiczna (Θ, Δ) z miarą $\sigma-$ skończoną oraz zbiór indeksów $I = \{1, \ldots, N\}$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Rozważmy przestrzeń metryczną (X, ρ_c), gdzie

$$X = Y \times I,$$

$$\rho_c((y_1, i), (y_2, j)) = \rho(y_1, y_2) + c\delta(i, j) \quad \text{dla } (y_1, i), (y_2, j) \in X, \tag{2.1}$$

oraz

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \neq j, \\ 0 & \text{dla } i = j. \end{cases}$$

Stała c zostanie dobrana później.

Obiektem naszych rozważań będzie łańcuch Markowa opisujący stany pewnego kawałkami deterministycznego procesu stochastycznego $\{(Y(t), \xi(t))\}_{t \geqslant 0}$ występujące tuż po skokach. Owe skoki realizowane będą w losowych odstępach czasu, a ich rozkłady warunkowane będą stanem procesu w momencie ostatniego skoku. Wspomniany proces stanowi model dla pewnego układu dynamicznego, opisanego poniżej, który między skokami ewoluuje w sposób deterministyczny, wyznaczony przez potoki przełączane losowo po każdym ze skoków.

Rozważmy skończony zbiór semipotoków, tzn. rodzinę złożoną z ciągłych odwzorowań $S_i : \mathbb{R}_+ \times Y \to Y,\ i \in I$, które spełniają warunki:

$$S_i(0, y) = y \quad \text{dla } y \in Y,$$

$$S_i(s + t, y) = S_i(s, S_i(t, y)) \quad \text{dla } y \in Y,\ s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Pomiędzy skokami proces $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ewoluuje zgodnie z jednym z powyższych semipotoków, którego indeks zależy od pewnego schodkowego procesu $\{\xi(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Bezpośrednio po każdym ze skoków następuje losowe przełączenie potoku, odbywające się zgodnie z rozkładem zadanym przez odpowiedni wiersz pewnej macierzy prawdopodobieństw $[\pi_{ij}]_{i,j \in I}$. Zakładamy tutaj, iż każda z funkcji π_{ij} jest odwzorowaniem ciągłym. W momencie skoku proces $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ zmienia swoje położenie za sprawą funkcji $q_\theta : Y \to Y$, gdzie $\theta \in \Theta$, którą losowo wybieramy ze zbioru $\{q_\theta : \theta \in \Theta\}$. Zakładamy, że odwzorowanie $(y, \theta) \to q_\theta(y)$ jest ciągłe. Wybór skoku będzie determinowany przez rozkład prawdopodobieństwa zadany przez gęstość $p_\theta : Y \to [0, \infty)$, przy czym zakładamy, że każde z odwzorowań $(y, \theta) \to p_\theta(y)$ jest ciągłe. Ponadto, intensywność skoków zależy od pewnej funkcji ciągłej $\lambda : Y \to (0, \infty)$, dla której

$$\underline{\lambda} = \inf_{y \in Y} \lambda(y) > 0 \quad \text{oraz} \quad \overline{\lambda} = \inf_{y \in Y} \lambda(y) < \infty. \tag{2.2}$$

Ewolucję procesu $\{(Y(t), \xi(t)\}_{t\in\, \mathbb{R}_+}$ można zatem opisać następująco. Zakładając, że $(y_0, i_0) \in X$ jest stanem początkowym, mamy $Y(t) = S_{i_0}(t, y_0)$ oraz $\xi(t) = i_0$ dla $t \in [0, t_1)$, gdzie t_1 oznacza moment pierwszego skoku. W chwili t_1 następuje skok i układ zmienia swoje położenie na

$$y_1 = q_{\theta_1}(S_{i_0}(t_1, y_0)),$$

gdzie $\theta_1 \in \Theta$ jest losowo wybrane według rozkładu zadanego przez gęstość $\theta \to p_\theta(S_{i_0}(t_1, y_0))$. Tuż po tym, ze zbioru $\{S_1, \ldots, S_N\}$, losujemy potok S_{i_1} z prawdopodobieństwem $\pi_{i_0 i_1}(y_1)$. Wówczas w przedziale czasu $[t_1, t_2)$ układ ewoluuje zgodnie ze wzorem $Y(t) = S_{i_1}(t - t_1, y_1)$ oraz $\xi(t) = i_1$. W kolejnym kroku cała procedura powtarza się dla stanu początkowego (y_1, i_1) w roli (y_0, i_0) i jest kontynuowana w sposób rekurencyjny. Ostatecznie otrzymujemy

$$Y(t) = S_{i_n}(t - t_n, y_n), \quad \xi(t) = i_n \quad \text{dla } \ [t_n, t_{n+1}),\ n \in \mathbb{N}_0$$

oraz

$$y_n = q_{\theta_n}(S_{i_{n-1}}(t_n - t_{n-1}, y_{n-1})) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

W niniejszej rozprawie skupimy się na łańcuchu $\{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \{(Y(\tau_n), \xi(\tau_n))\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdzie ciąg $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ opisuje chwile kolejnych skoków. Wielkości t_n, y_n, i_n, θ_n opiszemy za pomocą zmiennych losowych, odpowiednio τ_n, Y_n, ξ_n i η_n. Będziemy zakładać, że zmienne te określone są na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, prob)$, a ich rozkłady powiązane są opisanymi poniżej zależnościami:

1. $(Y_0, \xi_0) : \Omega \to X$ jest zmienną losową o ustalonym rozkładzie;

2. $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest takim ściśle rosnącym do nieskończoności ciągiem zmiennych losowych $\tau_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$, że $\tau_0 = 0$ oraz $\Delta\tau_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n$ są niezależne, a ich rozkłady warunkowe mają postać
$$prob(\Delta\tau_{n+1} \leqslant t | Y_n = y \text{ oraz } \xi_n = i) = 1 - e^{-L(t,y,i)}, \tag{2.3}$$
gdzie $L(t, y, i) = \int_0^t \lambda(S_i(s, y))ds$.

3. Zmienne losowe $\eta_n : \Omega \to \Theta$ oraz $\xi_n : \Omega \to I$ opisane są, odpowiednio, następującymi rozkładami
$$prob(\eta_{n+1} \in A | S_{\xi_n}(\Delta\tau_{n+1}, Y_n) = y; W_n) = \int_A p_\theta(y)\Delta(d\theta)$$
dla $y \in Y,\ A \in \mathcal{B}(\Theta),\ n \in \mathbb{N}_0$,
$$prob(\xi_n = j | Y_n = y,\ \xi_{n-1} = i; W_n) = \pi_{ij}(y)$$

dla $y \in Y,\ i, j \in I,\ n \in \mathbb{N}$, gdzie

$$W_0 = (Y_0, \xi_0) \text{ oraz } W_n = (Y_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zakładamy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$, zmienne losowe $\Delta\tau_{n+1},\ \eta_{n+1}$ oraz ξ_{n+1} są warunkowo niezależne przy danym W_n oraz, że $\Delta\tau_{n+1}$ są niezależne od W_n.

Rozważmy ciąg zmiennych losowych $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ Y_n : \Omega \to Y$ danych wzorem:

$$Y_{n+1} = q(S_{\xi_n}(\Delta\tau_{n+1}, Y_n), \eta_{n+1}) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_0.$$

Można łatwo pokazać, że proces dyskretny $\{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest jednorodnym w czasie łańcuchem Markowa, którego funkcja przejścia $P : X \times \mathcal{B}(X) \to [0, 1]$ dana jest wzorem

$$P((y, i), A) = \int_0^\infty \lambda(S_i(t, y))e^{-L(t,y,i)}\Delta_t((y, i), A)dt, \tag{2.4}$$

gdzie odwzorowanie $\Delta_t : X \times \mathcal{B}(X) \to [0, 1]$ jest postaci

$$\Delta_t((y, i), A) := \sum_{j\in I} \int_\Theta \mathbb{1}_A(q_\theta(S_i(t, y)), j)\pi_{ij}(q_\theta(S_i(t, y))p_\theta(S_i(t, y))\Delta(d\theta)$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, $(y, i) \in X,\ A \in \mathcal{B}(X)$.

Ewolucję rozkładów

$$\mu_n(A) := prob\{(Y_n, \xi_n) \in A\}$$

łańcucha $\{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ można opisać przy pomocy operatora Markowa $(\cdot)P : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ wyznaczonego przez jądro P, zgodnie ze wzorem (1.2), tzn.

$$\mu_{n+1} = \mu_n P. \tag{2.5}$$

Przyjmijmy następujące założenia:

(A1) istnieje taki punkt $y_* \in Y$, że

$$\sup_{y\in Y} \int_0^\infty e^{-\underline{\lambda} t} \int_\Theta \rho(q_\theta(S_i(t, y_*)), y_*)p_\theta(S_i(t, y))\Delta(d\theta)dt < \infty \quad \text{dla } i \in I,$$

(A2) istnieją takie stałe $\alpha \in \mathbb{R}$ i $L \in \mathbb{R}_+$, że

$$\rho(S_i(t, y_1), S_i(t, y_2)) \leqslant Le^{\alpha t}\rho(y_1, y_2) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+,\ y_1, y_2 \in Y,\ i \in I,$$

(A3) istnieje taka stała $L_q \in \mathbb{R}_+$, że

$$\int_\Theta \rho(q_\theta(y_1), q_\theta(y_2))p_\theta(y_1)\Delta(d\theta) \leqslant L_q\rho(y_1, y_2) \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y,$$

(A4) istnieje taka stała $L_\lambda \in \mathbb{R}_+$, że

$$|\lambda(y_1) - \lambda(y_2)| \leqslant L_\lambda \rho(y_1, y_2) \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y,$$

(A5) istnieją takie funkcje $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_0$ spełniające warunek Diniego (1.1), że

$$\sum_{j\in I} |\pi_{ij}(y_1) - \pi_{ij}(y_2)| \leqslant \psi_1(\rho(y_1, y_2)) \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y,\ i \in I,$$

$$\int_\Theta |p_\theta(y_1) - p_\theta(y_2)| \Delta(d\theta) \leqslant \psi_2(\rho(y_1, y_2)) \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y.$$

Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} a &:= \frac{\overline{\lambda} L L_q}{\underline{\lambda} - \alpha}, \\ b &:= \overline{\lambda} \max_{i\in I} \sup_{y\in Y} \int_0^\infty e^{-\underline{\lambda} t} \int_\Theta \rho(q_\theta(S_i(t, y_*)), y_*) p_\theta(S_i(t, y)) \Delta(d\theta) dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Lemat 2.1. *Niech* $(\cdot)P$ *będzie operatorem Markowa generowanym przez funkcję przejścia* (2.4). *Załóżmy, że warunki* (A1) – (A3) *zachodzą ze stałymi spełniającymi nierówność*

$$\overline{\lambda} L L_q + \alpha < \underline{\lambda}. \tag{2.7}$$

Wówczas, dla stałych $a, b \in \mathbb{R}_+$*, zdefiniowanych przez* (2.6)*, oraz funkcji* $V : X \to \mathbb{R}_+$ *danej wzorem*

$$V(y, i) = \rho(y, y_*) \quad \textit{dla } (y, i) \in X \tag{2.8}$$

zachodzi nierówność (1.6)*, gdzie* $y_* \in Y$ *spełnia założenie* (A1).

Dowód. Ustalmy dowolne $i_* \in I$. Wówczas dla $x_* := (y_*, i_*)$, spełniona jest nierówność $V(x) \leqslant \rho_c(x_*, x)$ dla $x \in X$. Niech

$$B_j(t, y) = \int_\Theta \rho(q_\theta(S_j(t, y_*)), y_*)\, p_\theta(S_j(t, y))\, \Delta(d\theta) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+,\ j \in I.$$

Z nierówności (2.7) oraz (A1) wynika, że $a \in (0, 1)$, $b < \infty$ oraz $B_j(t, y) < \infty$ dla prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}_+,\ y \in Y$. Niech $(y, i) \in X$. Wówczas z warunku (A3) oraz (A2) otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \Delta_t V(y, i) &= \int_\Theta \rho(q_\theta(S_i(t, y)), y_*)) \Big[\sum_{j\in I} \pi_{ij}(q_\theta(S_i(t, y))) \Big] p_\theta(S_i(t, y))\, \Delta(d\theta) \\ &\leqslant \int_\Theta \rho(q_\theta(S_i(t, y)), q_\theta(S_i(t, y_*)))\, p_\theta(S_i(t, y))\, \Delta(d\theta) \\ &+ \int_\Theta \rho(q_\theta(S_i(t, y_*)), y_*)\, p_\theta(S_i(t, y))\, \Delta(d\theta) \\ &\leqslant L_q \rho(S_i(t, y), S_i(t, y_*)) + B_i(t, y) \leqslant L L_q e^{\alpha t} \rho(y, y_*) + B_i(t, y). \end{aligned}$$

Stąd oraz z (2.2) mamy

$$
\begin{aligned}
PV(y,i) &= \int_0^\infty \lambda(S_i(t,y))e^{-L(t,y,i)}\,\Delta_t V(y,i)dt \leqslant \int_0^\infty \overline{\lambda}e^{-\underline{\lambda}t}\,\Delta_t V(y,i)\,dt \\
&\leqslant \overline{\lambda}LL_q\int_0^\infty e^{(\alpha-\underline{\lambda})t}\,dt\,\rho(y,y_*) + \int_0^\infty \overline{\lambda}e^{-\underline{\lambda}t}B_i(t,y)\,dt \\
&\leqslant \frac{\overline{\lambda}LL_q}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y,y_*) + b = aV(y,i)+b.
\end{aligned}
$$

□

2.1 Asymptotyczna stabilność

W niniejszym rozdziale zaprezentujemy dowód asymptotycznej stabilności operatora $(\cdot)P$, opierając się głównie na rezultatach pracy [36], sformułowanych dla klasy nierozszerzających i semikoncentrujących operatorów Markowa (por. twierdzenia 1.22, 1.24). Zaznaczmy tutaj, iż mimo wielu zalet takiego podejścia, wynikających m.in. z możliwości bezpośredniego stosowania ogólnych wyników o relatywnie łatwo weryfikowalnych założeniach, nie prowadzi ono do oszacowania tempa zbieżności rozkładów rozważanego procesu do miary niezmienniczej. Do rozstrzygnięcia tej ostatniej kwestii posłużymy się zupełnie inną metodą, której poświęcony zostanie kolejny rozdział.

W tej części pracy zakładamy, że zbiór Θ jest skończony, tzn. $\Theta = \{\theta_1,\ldots,\theta_M\}$, gdzie $M\in\mathbb{N}$, a określona na nim miara Δ zadana jest wzorem $\Delta(A)=\sum_{i=1}^M \mathbb{1}_A(\theta_i),\ A\subset\Theta$ (tzn. jest miarą liczącą).

W tym przypadku operator Markowa (2.5) ma postać

$$
\begin{aligned}
\mu P(A) = \sum_{j\in I}\sum_{\theta\in\Theta}\int_X\int_0^\infty &\mathbb{1}_A(q_\theta(S_i(t,y)),j)e^{-L(t,y,i)}\lambda(S_i(t,y)) \\
&\times \pi_{ij}(q_\theta(S_i(t,y)))p_\theta(S_i(t,y))dt\mu(dy,di)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

dla $\mu\in\mathcal{M}(X)$ oraz $A\in\mathcal{B}(X)$, a jego operator dualny $P(\cdot): B(X)\to B(X)$ jest dany wzorem

$$
Pf(y,i) = \sum_{j\in I}\sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty f(q_\theta(S_i(t,y)),j)e^{-L(t,y,i)}\lambda(S_i(t,y))\pi_{ij}(q_\theta(S_i(t,y)))p_\theta(S_i(t,y))dt
$$

dla $f\in B(X)$ oraz $(y,i)\in X$.

Twierdzenie 2.2. *Załóżmy, że spełnione są warunki* $(A2)-(A5)$ *oraz nierówność* (2.7)*. Wówczas operator* $(\cdot)P$*, postaci* (2.9)*, jest nierozszerzający względem metryki* $\varphi\circ\rho_c$*, gdzie* φ *jest pewną funkcją z klasy* Φ*.*

Dowód. Niech $\psi_1,\ \psi_2 \in \Phi_0$ będą funkcjami występującymi w założeniu $(A5)$.

Zdefiniujmy $\overline{\psi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jako

$$\overline{\psi}(t) = \frac{L_\lambda L(\overline{\lambda} + \underline{\lambda})}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda} - \alpha)} t + \psi_1(\frac{\overline{\lambda} L L_q}{\underline{\lambda} - \alpha} t) + \psi_2(\frac{\overline{\lambda} L}{\underline{\lambda} - \alpha} t).$$

Oczywiście $\overline{\psi} \in \Phi_0$ oraz spełnia warunek (1.1). Stąd istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że

$$\overline{\psi}(t) + \varphi(at) \leqslant \varphi(t),$$

gdzie a dana jest wzorem (2.6). Ponieważ $\varphi \in \Phi$, więc możemy wybrać takie $c \in \mathbb{R}_+$, że $\varphi(c) > 2$. Dla tak dobranego c, w przestrzeni X rozważmy metrykę $\varphi \circ \rho_c$, gdzie ρ_c jest zadana wzorem (2.1). Pokażemy, że operator $(\cdot)P$ jest nierozszerzający względem tej metryki. Ustalmy $f \in \mathcal{F}_{FM}^{\varphi \circ \rho_c}$. Korzystając z uwagi 1.16 wystarczy pokazać, że

$$|Pf(y_1, i) - Pf(y_2, j)| \leqslant \varphi(\rho_c((y_1, i), (y_2, j)) \quad \text{dla } (y_1, i), (y_2, j) \in X.$$

Ponieważ $c\delta(i,j) = c$ dla $i \neq j$, funkcja φ jest niemalejąca i $\varphi(c) > 2$ oraz $||f|| \leqslant 1$, to powyższa nierówność jest trywialnie spełniona dla $i \neq j$. Dalsze rozumowanie możemy zatem ograniczyć do przypadku, gdy $i = j$. Zauważmy, że wówczas

$$\begin{aligned}
&|Pf(y_1, i) - Pf(y_2, i)| \\
&\leqslant \sum_{k \in I} \sum_{\theta \in \Theta} \int_0^\infty |f(q_\theta(S_i(t, y_1)), k) e^{-L(t, y_1, i)} \lambda(S_i(t, y_1)) \pi_{ik}(q_\theta(S_i(t, y_1))) p_\theta(S_i(t, y_1))) \\
&- f(q_\theta(S_i(t, y_2)), k) e^{-L(t, y_2, i)} \lambda(S_i(t, y_2)) \pi_{ik}(q_\theta(S_i(t, y_2))) p_\theta(S_i(t, y_2)))| dt \leqslant I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
I_1 = &\sum_{k \in I} \sum_{\theta \in \Theta} \int_0^\infty |f(q_\theta(S_i(t, y_1)), k) - f(q_\theta(S_i(t, y_2)), k)| \\
&\times e^{-L(t, y_2, i)} \lambda(S_i(t, y_2)) \pi_{ik}(q_\theta(S_i(t, y_2))) p_\theta(S_i(t, y_2))) dt
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
I_2 = \sum_{k \in I} \sum_{\theta \in \Theta} \int_0^\infty |f(q_\theta(S_i(t, y_1)), k)| |e^{-L(t, y_1, i)} \lambda(S_i(t, y_1)) \pi_{ik}(q_\theta(S_i(t, y_1))) p_\theta(S_i(t, y_1))) \\
- e^{-L(t, y_2, i)} \lambda(S_i(t, y_2)) \pi_{ik}(q_\theta(S_i(t, y_2))) p_\theta(S_i(t, y_2)))| dt.
\end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że $f \in \mathcal{F}_{FM}^{\varphi \circ \rho_c}$, a następnie z warunków $(A2)$ i $(A3)$ oraz nierówności

Jensena dla funkcji wklęsłych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty \varphi(\rho(q_\theta(S_i(t,y_1)),q_\theta(S_i(t,y_2))))\\
&\times e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))\Big[\sum_{k\in I}\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_2)))\Big]p_\theta(S_i(t,y_2)))dt\\
&\leqslant \int_0^\infty \varphi(\sum_{\theta\in\Theta}p_\theta(S_i(t,y_2))\rho(q_\theta(S_i(t,y_1)),q_\theta(S_i(t,y_2)))) e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))dt \qquad (2.10)\\
&\leqslant \int_0^\infty \varphi(\rho(S_i(t,y_1),S_i(t,y_2))e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))dt\\
&\leqslant \varphi(\int_0^\infty \overline{\lambda}L_qLe^{(\alpha-\underline{\lambda})t}\rho(y_1,y_2)dt)=\varphi(\frac{\overline{\lambda}LL_q}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y_1,y_2)).
\end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do oszacowania I_2. Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant \sum_{k\in I}\sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty |e^{-L(t,y_1,i)}\lambda(S_i(t,y_1))\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_1)))p_\theta(S_i(t,y_1)))\\
&- e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_2)))p_\theta(S_i(t,y_2)))|dt\\
&\leqslant \sum_{k\in I}\sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty \lambda(S_i(t,y_1))|e^{-L(t,y_1,i)}-e^{-L(t,y_2,i)}|\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_1)))p_\theta(S_i(t,y_1)))dt\\
&+\sum_{k\in I}\sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}|\lambda(S_i(t,y_1))\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_1)))p_\theta(S_i(t,y_1))\\
&-\lambda(S_i(t,y_2))\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_2)))p_\theta(S_i(t,y_2))|dt = I_3+I_4,
\end{aligned}$$

gdzie I_3 oraz I_4, to odpowiednio pierwszy i drugi składnik powyższej sumy. Oszacujmy pierwszy z nich. Ponieważ $\sum_{k\in I}\pi_{ik}(y)=1$ dla każdego $y\in Y$, $i\in I$ oraz $\sum_{\theta\in\Theta}p_\theta(y)=1$ dla każdego $y\in Y$, więc

$$I_3\leqslant \int_0^\infty \lambda(S_i(t,y_1))|e^{-L(t,y_1,i)}-e^{-L(t,y_2,i)}|dt.$$

Ponieważ

$$|e^{-\alpha}-e^{-\beta}|\leqslant e^{-\gamma}|\beta-\alpha| \quad \text{dla dowolnych } \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \gamma=\min\{\alpha,\beta\},$$

to dla każdego $t\in\mathbb{R}_+$, $y_1,y_2\in Y$ oraz $i\in I$ otrzymujemy oszacowanie

$$|e^{-L(t,y_1,i)}-e^{-L(t,y_2,i)}|\leqslant e^{-\underline{\lambda}t}|L(t,y_1,i)-L(t,y_2,i)|.$$

Zatem stosując powyższą nierówność, a także definicję funkcji $L(t,y,i)$ oraz warunki $(A2)$

i $(A4)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I_3 &\leqslant \int_0^\infty \lambda(S_i(t,y_1))e^{-\underline{\lambda}t}|L(t,y_1,i)-L(t,y_2,i)|dt\\
&\leqslant \int_0^\infty \overline{\lambda}e^{-\underline{\lambda}t}\Big[\int_0^t(\lambda(S_i(s,y_1))-\lambda(S_i(s,y_2))ds\Big]dt\\
&\leqslant \int_0^\infty \overline{\lambda}e^{-\underline{\lambda}t}\Big[\int_0^t L_\lambda\rho(S_i(s,y_1),S_i(s,y_2))ds\Big]dt\\
&\leqslant \overline{\lambda}L_\lambda L\rho(y_1,y_2)\int_0^\infty e^{-\underline{\lambda}t}\Big[\int_0^t e^{\alpha s}ds\Big]dt\\
&\leqslant \frac{\overline{\lambda}L_\lambda L}{\alpha}\rho(y_1,y_2)\int_0^\infty e^{-\underline{\lambda}t}(e^{\alpha t}-1)dt=\frac{\overline{\lambda}L_\lambda L}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda}-\alpha)}\rho(y_1,y_2).
\end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do oszacowania I_4. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
I_4 &\leqslant \sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}|\lambda(S_i(t,y_1))-\lambda(S_i(t,y_2))|\Big[\sum_{k\in I}\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_1)))\Big]p_\theta(S_i(t,y_1))dt\\
&+\sum_{k\in I}\sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))|\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_1)))p_\theta(S_i(t,y_1))\\
&-\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_2)))p_\theta(S_i(t,y_2))|dt=I_5+I_6,
\end{aligned}$$

gdzie I_5 oraz I_6, to odpowiednio pierwszy i drugi sładnik powyższej sumy. Oszacujmy pierwszy z nich. Korzystając z warunków $(A2)$ oraz $(A4)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I_5 &\leqslant \int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}|\lambda(S_i(t,y_1))-\lambda(S_i(t,y_2))|dt\leqslant L_\lambda\int_0^\infty e^{-\underline{\lambda}t}\rho(S_i(t,y_1),S_i(t,y_2))dt\\
&\leqslant LL_\lambda\rho(y_1,y_2)\int_0^\infty e^{(\alpha-\underline{\lambda})t}dt=\frac{LL_\lambda}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y_1,y_2).
\end{aligned}$$

Przejdźmy do oszacowania I_6, z warunku $(A5)$ mamy

$$\begin{aligned}
I_6 &\leqslant \sum_{k\in I}\sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))p_\theta(S_i(t,y_1))|\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_1)))-\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_2)))|dt\\
&+\sum_{k\in I}\sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))\pi_{ik}(q_\theta(S_i(t,y_2)))|p_\theta(S_i(t,y_1))-p_\theta(S_i(t,y_2))|dt\\
&\leqslant \sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))p_\theta(S_i(t,y_1))\psi_1(\rho(q_\theta(S_i(t,y_1)),q_\theta(S_i(t,y_2))))dt\\
&+\sum_{\theta\in\Theta}\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))|p_\theta(S_i(t,y_1))-p_\theta(S_i(t,y_2))|dt\\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))\Big[\sum_{\theta\in\Theta}(p_\theta(S_i(t,y_1))\psi_1(\rho(q_\theta(S_i(t,y_1)),q_\theta(S_i(t,y_2)))))\Big]dt\\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))\psi_2(\rho(S_i(t,y_1),S_i(t,y_2)))dt.
\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności Jensena dla funkcji wklęsłych (dwukrotnie w przypadku pierwszego składnika i jednokrotnie w przypadku drugiego) oraz z warunków $(A2)$ i $(A3)$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
I_6 &\leqslant \psi_1\Big(\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))\Big[\sum_{\theta\in\Theta} p_\theta(S_i(t,y_1))\rho(q_\theta(S_i(t,y_1)),q_\theta(S_i(t,y_2)))\Big]dt \\
&+\psi_2\Big(\int_0^\infty e^{-L(t,y_2,i)}\lambda(S_i(t,y_2))\rho(S_i(t,y_1),S_i(t,y_2)))dt \\
&\leqslant \psi_1(\overline{\lambda}L_qL\rho(y_1,y_2)\int_0^\infty e^{(\alpha-\underline{\lambda})t}dt)+\psi_2(L\overline{\lambda}\int_0^\infty e^{(\alpha-\underline{\lambda})t}\rho(y_1,y_2)dt) \\
&=\psi_1\Big(\frac{\overline{\lambda}LL_q}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y_1,y_2)\Big)+\psi_2\Big(\frac{\overline{\lambda}L}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y_1,y_2)\Big).
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Ostatecznie, korzystając z (2.10) oraz (2.11), otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&|Pf(y_1,i)-Pf(y_2,i)| \\
&\leqslant \varphi\Big(\frac{\overline{\lambda}LL_q}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y_1,y_2)\Big)+\frac{L_\lambda L(\overline{\lambda}+\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda}-\alpha)}\rho(y_1,y_2)+\psi_1\Big(\frac{\overline{\lambda}LL_q}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y_1,y_2)\Big)+\psi_2\Big(\frac{\overline{\lambda}L}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y_1,y_2)\Big) \\
&\leqslant \varphi(a\rho(y_1,y_2))+\overline{\psi}(\rho(y_1,y_2))\leqslant\varphi(\rho(y_1,y_2)).
\end{aligned}
$$

□

Twierdzenie 2.3. *Załóżmy, że spełnione są warunki* $(A1)-(A3)$ *oraz nierówność* (2.7). *Wówczas operator* $(\cdot)P$ *postaci* (2.9), *jest semikoncentrujący.*

Dowód. Na podstawie lematu 2.1 wiemy, że dla pewnej funkcji Lapunowa V oraz stałych $a\in(0,1)$ i $b>0$, operator $P(\cdot)$ spełnia warunek (1.6). Zatem, na mocy twierdzenia 1.19 istnieje taki ograniczony zbiór $A\in\mathcal{B}(X)$, że

$$
\inf_{\mu\in\mathcal{M}_1(X)}\liminf_{n\to\infty}\mu P^n(A)>0,
$$

a w konsekwencji zbiór (uwaga 1.20)

$$
E(P)=\{\varepsilon>0:\inf_{\mu\in\mathcal{M}_1(X)}\liminf_{n\to\infty}\mu P^n(C)>0\ \text{ dla pewnego } C\in C_\varepsilon(X)\}
$$

jest niepusty.

Pokażemy, że $\inf E(P)=0$, co na mocy uwagi 1.21 pozwoli nam stwierdzić, że operator $(\cdot)P$ jest semikoncentujący. Dowód poprowadzimy nie wprost, wyszczególniając przy tym dwa przypadki w zależności od stałej α występującej w założeniu $(A2)$.
Przypuśćmy zatem, że

$$
\varepsilon^*=\inf E(P)>0.
$$

Przypadek I: Załóżmy najpierw, że $\alpha<0$ oraz wybierzmy takie $z_0\in Y$ i $r>0$, że

$$\inf_{\mu\in\mathcal{M}_1(X)}\liminf_{n\to\infty}\mu P^n(B(z_0,r)\times I)>0. \tag{2.12}$$

Zważywszy na ujemność α, możemy dobrać takie $t_*>0$, że

$$\varepsilon=4rLL_q e^{\alpha t_*}<\varepsilon^*. \tag{2.13}$$

Ustalmy dowolne $\mu\in\mathcal{M}(X)$ oraz rozważmy zbiór

$$C_{\frac{\varepsilon}{2}}=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{t\in[t_*,2t_*]}\bigcup_{\theta\in\Theta}(\overline{B}(q_\theta(S_i(t,z_0)),\frac{\varepsilon}{2})\times I).$$

Zauważmy, że $C_{\frac{\varepsilon}{2}}\in C_\varepsilon(X)$.

Dla każdego $y\in B(z_0,r),\ i\in I$ oraz $t\in[t_*,\infty)$ rozważmy zbiór:

$$\Theta_0(y,i,t)=\{\theta\in\Theta:\rho(q_\theta(S_i(t,y)),q_\theta(S_i(t,z_0)))\leqslant 2L_q\rho(S_i(t,y),S_i(t,z_0))\}.$$

Pokażemy, że

$$\sum_{\theta\in\Theta_0(y,i,t)}p_\theta(S_i(t,y))>1/2 \tag{2.14}$$

dla każdego $i\in I$, $y\in B(z_0,r)$, $t\in[t_*,\infty)$. Korzystając z warunku $(A3)$ zauważmy, że

$$\begin{aligned}L_q\rho(S_i(t,y),S_i(t,z_0))&\geqslant\sum_{\theta\in\Theta\setminus\Theta_0(y,i,t)}\rho(q_\theta(S_i(t,y)),q_\theta(S_i(t,z_o)))p_\theta(q_\theta(S_i(t,y)))\\&>2L_q\rho(S_i(t,y),S_i(t,z_0))\sum_{\theta\in\Theta\setminus\Theta_0(y,i,t)}p_\theta(q_\theta(S_i(t,y))).\end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{\theta\in\Theta\setminus\Theta_0(y,i,t)}p_\theta(q_\theta(S_i(t,y)))<\frac{1}{2},$$

co uzasadnia postulowaną nierówność (2.14).

Na mocy $(A2)$ oraz (2.13), dla dowolnych $y\in B(z_0,r)$, $t\in[t_*,2t_*]$, $i\in I$ oraz $\theta\in\Theta_0(y,i,t)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\rho(q_\theta(S_i(t,y)),q_\theta(S_i(t,z_0)))&\leqslant 2L_q\rho(S_i(t,y),S_i(t,z_0))\\&\leqslant 2LL_qe^{\alpha t}\rho(y,z_0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

stąd $(q_\theta(S_i(t,y)),j)\in C_{\frac{\varepsilon}{2}}$ dla wszystkich $i,j\in I,\ y\in B(z_0,r)$ oraz $t\in[t_*,2t_*]$.

Wobec (2.2) oraz (2.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu P^{n+1}(C_{\frac{\varepsilon}{2}})&\geqslant\int_{B(z_0,r)\times I}\int_{t_*}^{2t_*}\underline{\lambda}e^{-\overline{\lambda}t}\Big[\sum_{j\in I}\pi_{ij}(q_\theta(S_i(t,y)))\Big]\Big[\sum_{\theta\in\Theta_0(y,i,t)}p_\theta(S_i(t,y))\Big]dt\mu P^n(dy,di)\\&>\frac{1}{2}\frac{\underline{\lambda}}{\overline{\lambda}}e^{-\overline{\lambda}t_*}(1-e^{-\overline{\lambda}t_*})\mu P^n(B(z_0,r)\times I)\ \text{dla wszystkich}\ \mu\in\mathcal{M}_1(X).\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę (2.12), powyższe oszacowanie pozwala nam stwierdzić, że

$$\inf_{\mu\in\mathcal{M}_1(X)} \liminf_{n\to\infty} \mu P^n(C_\varepsilon) > 0,$$

co prowadzi do sprzeczności, gdyż $E(P) \ni \varepsilon < \varepsilon^* = \inf E(P)$.

Przypadek II: Załóżmy teraz, że $\alpha \geqslant 0$. Przekształcając odpowiednio nierówność (2.7), otrzymujemy

$$LL_q + \alpha\overline{\lambda}^{-1} < \underline{\lambda}\overline{\lambda}^{-1} \leqslant 1.$$

Zatem, w szczególności $LL_q < 1$. Dobierzmy $\eta, t_* > 0$ tak, aby

$$2(1+\eta)LL_q e^{\alpha t_*} < 1.$$

Ponadto, niech $\varepsilon_0 > \varepsilon^*$ będzie takie, że

$$\varepsilon = 2(1+\eta)LL_q e^{\alpha t_*}\varepsilon_0 < \varepsilon^*. \tag{2.15}$$

Z przypuszczenia, że $\varepsilon^* = \inf E(P) > 0$ wnioskujemy istnienie takiego zbioru $C \in \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(X)$, że

$$\beta = \inf_{\mu\in\mathcal{M}_1(X)} \liminf_{n\to\infty} \mu P^n(C) > 0. \tag{2.16}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że

$$C = \bigcup_{k=1}^{m} (\overline{B}(z_k, \frac{\varepsilon_0}{2}) \times I) \tag{2.17}$$

dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $z_1, \ldots, z_m \in Y$. Ustalmy $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ oraz zdefiniujmy zbiór $C_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathcal{C}_\varepsilon(X)$ następująco

$$C_{\frac{\varepsilon}{2}} = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{t\in[0,t_*]} \bigcup_{\theta\in\Theta} \bigcup_{k=1}^{m} (\overline{B}(q_\theta(S_i(t, z_k)), \frac{\varepsilon}{2}) \times I).$$

Z postaci (2.17) zbioru C oraz z nierówności (2.16) wnioskujemy, że istnieje taki ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o wyrazach w zbiorze $\{1, \ldots, m\}$, że

$$\mu P^n(B(z_{k_n}, \varepsilon_0) \times I) \geqslant \frac{\beta}{m} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz dowolnych $y \in B(z_{k_n}, \varepsilon_0)$, $i \in I$ oraz $t < t_*$ definiujemy

$$\begin{aligned}\Theta_0(n, y, i, t) = \{\theta \in \Theta :\ & \rho(q_\theta(S_i(t, y)), q_\theta(S_i(t, z_{k_n}))) \\ & \leqslant (1+\eta)L_q\rho(S_i(t, y), S_i(t, z_{k_n}))\}.\end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku pierwszym, pokażemy, że

$$\sum_{\theta\in\Theta_0(n,y,i,t)} p_\theta(S_i(t,y)) > \eta/(1+\eta) \tag{2.19}$$

dla każdego $n\in\mathbb{N}$, $y\in B(z_{k_n},\varepsilon_0)$, $i\in I$, $t\in[0,t_*)$. Korzystając z warunku $(A3)$ zauważmy, że

$$\begin{aligned} L_q\rho(S_i(t,y),S_i(t,z_0)) &\geqslant \sum_{\theta\in\Theta\setminus\Theta_0(n,y,i,t)} \rho(q_\theta(S_i(t,y)),q_\theta(S_i(t,z_o)))p_\theta(q_\theta(S_i(t,y)))\\ &> (1+\eta)L_q\rho(S_i(t,y),S_i(t,z_0))\sum_{\theta\in\Theta\setminus\Theta_0(y,i,t)} p_\theta(q_\theta(S_i(t,y))). \end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{\theta\in\Theta\setminus\Theta_0(n,y,i,t)} p_\theta(q_\theta(S_i(t,y)) < \frac{1}{1+\eta},$$

co uzasadnia (2.19).

Na mocy warunku (A3) oraz (2.15), dla dowolnych $n\in\mathbb{N}$, $y\in B(z_{k_n},\varepsilon_0)$, $t\in[0,t_*)$, $i\in I$ oraz $\theta\in\Theta_0(y,i,t)$, zachodzi

$$\begin{aligned} \rho(q_\theta(S_i(t,y)),q_\theta(S_i(t,z_{k_n}))) &\leqslant (1+\eta)L_q\rho(S_i(t,y),S_i(t,z_{k_n}))\\ &\leqslant (1+\eta)LL_qe^{\alpha t}\rho(y,z_{k_n}) \leqslant (1+\eta)LL_qe^{\alpha t_*}\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Zatem $(q_\theta(S_i(t,y)),j)\in C_{\frac{\varepsilon}{2}}$ dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$, $y\in B(z_{k_n},\varepsilon_0)$, $t\in[0,t_*)$, $i,j\in I$ oraz $\theta\in\Theta_0(y,i,t)$. Stąd, na podstawie (2.2) oraz (2.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu P^{n+1}(C_{\frac{\varepsilon}{2}}) &\geqslant \int_{B(z_{k_n},\varepsilon_0)\times I}\int_0^{t_*} \underline{\lambda}e^{-\overline{\lambda}t}\Big[\sum_{j\in I}\pi_{ij}(q_\theta(S_i(t,y)))\Big]\Big[\sum_{\theta\in\Theta_0(y,i,t)} p_\theta(S_i(t,y))\Big]dt\mu P^n(dy,di)\\ &> \frac{1}{1+\eta}\Big[\int_0^{t_*}\underline{\lambda}e^{-\overline{\lambda}t}dt\Big]\mu P^n(B(z_{k_n},\varepsilon_0)\times I) = \frac{\underline{\lambda}}{\overline{\lambda}(1+\eta)}(1-e^{-\overline{\lambda}t_*})\mu P^n(B(z_{k_n},\varepsilon_0)\times I). \end{aligned}$$

Korzystając z (2.18) ostatecznie otrzymujemy, że

$$\liminf_{n\to\infty}\mu P^n(C_{\frac{\varepsilon}{2}}) \geqslant \frac{\underline{\lambda}\beta}{m\overline{\lambda}(1+\eta)}(1-e^{-\overline{\lambda}t_*}) > 0,$$

co prowadzi do sprzeczności, gdyż $E(P)\ni\varepsilon<\varepsilon^*=\inf E(P)$. □

Wniosek 2.4. *Załóżmy, że spełnione są warunki $(A1)-(A5)$ oraz nierówność (2.7). Wówczas operator $(\cdot)P$ postaci (2.9), posiada probabilistyczną miarę niezmienniczą.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.2 operator $(\cdot)P$ jest nierozszerzający względem metryki $\varphi \circ \rho_c$ równoważnej metryce ρ_c. Z twierdzenia 2.3 wynika natomiast, że jest on semikoncentrujący. Stosując twierdzenie 1.24 otrzymujemy zatem tezę. □

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że spełnione są założenia* (A1) – (A5)*, przy czym dla stałych* α*,* L*,* L_q *zachodzi nierówność* (2.7) *oraz* $L_q < 1$*. Ponadto, przypuśćmy, że*

$$\delta_p := \inf\{p_\theta(y) : y \in Y,\ \theta \in \Theta\} > 0; \tag{2.20}$$

$$\delta_\pi := \inf\{\pi_{i\bar{i}}(y) : y \in Y,\ i \in I\} > 0 \quad \textit{dla pewnego } \bar{i} \in I. \tag{2.21}$$

Wówczas operator Markowa dany wzorem (2.9) *jest asymptotycznie stabilny.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia 2.2 wiadomo, że operator $(\cdot)P$ jest nierozszerzający względem metryki $\varphi \circ \rho_c$ dla pewnej funkcji $\varphi \in \Phi$, natomiast twierdzenie 2.3 gwarantuje, że $(\cdot)P$ jest również semikoncentrujący. Ponadto, na mocy wniosku 2.4, istnieje miara probabilistyczna niezmiennicza względem $(\cdot)P$. Zważywszy na twierdzenie 1.22 oraz uwagę 1.23, wystarczy zatem pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\gamma > 0$, że dla dowolnych $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(X)$ oraz pewnego zbioru $A \in \mathcal{B}(X)$ spełniającego warunek $\operatorname{diam}_{\varphi\circ\rho_c} A < \varepsilon$ i liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mu_k P^n(A) \geqslant \gamma \quad \text{dla } k = 1, 2.$$

Korzystając z twierdzenia 1.24 otrzymujemy, że rodzina $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1(X))$ jest ciasna. Zatem istnieje taki zbiór zwarty $F \subset X$, że

$$\mu(F) \geqslant \frac{4}{5} \quad \text{dla każdej miary } \mu \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1(X)).$$

Dla zwięzłości zapisu przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta}_n}(y) = (q_{\theta_n} \circ \ldots \circ q_{\theta_1})(y),\\
&(\mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta}_n} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i) = q_{\theta_n}(S_{i_{n-1}}(t_n, q_{\theta_{n-1}}(S_{i_{n-2}}(t_{n-1} \ldots q_{\theta_1}(S_i(t_1, y)))))),\\
&(\mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}} \circ \mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta}_{n-1}})(\boldsymbol{t_n}, y, i) = S_{i_{n-1}}(t_n, q_{\theta_{n-1}}(S_{i_{n-2}}(t_{n-1} \ldots q_{\theta_1}(S_i(t_1, y))))),\\
&d\boldsymbol{t_n} = dt_n \ldots dt_1,
\end{aligned}$$

gdzie $\boldsymbol{\theta_n} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Theta^n$, $\mathbf{i_{n-1}} = (i_1, \ldots, i_{n-1}) \in I^{n-1}$, $\boldsymbol{t_n} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ dla $n \geqslant 2$.

Dla $n \geqslant 2$ rozważmy funkcje:
$\Pi_n : Y \times I^{n+1} \times \mathbb{R}_+^n \times \Theta^n \to [0, 1]$,
$\Lambda_n : Y \times I^n \times \mathbb{R}_+^n \times \Theta^{n-1} \to \mathbb{R}_+$,

$P_n : Y \times I^n \times \mathbb{R}_+^n \times \Theta^n \to \mathbb{R}_+$,
$\Sigma_n : Y \times I^n \times \mathbb{R}_+^n \times \Theta^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ zadane wzorami:

$$\Pi_n(y, i, \mathbf{i_n}, \boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{\theta_n}) = \pi_{ii_1}(q_{\theta_1}(S_i(t_1, y)))\pi_{i_1 i_2}(q_{\theta_2}(S_{i_1}(t_2, q_{\theta_1}(S_i(t_1, y)))))$$
$$\times \ldots \cdot \pi_{i_{n-1}i_n}((\mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_n}} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i)),$$

$$\Lambda_n(y, i, \mathbf{i_{n-1}}, \boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{\theta_{n-1}}) = \lambda(S_i(t_1, y))\lambda(S_{i_1}(t_2, q_{\theta_1}(S_i(t_1, y)))) \cdot \ldots \cdot \lambda((\mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}} \circ \mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i)),$$

$$P_n(y, i, \mathbf{i_{n-1}}, \boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{\theta_n}) = p_{\theta_1}(S_i(t_1, y))p_{\theta_2}(S_{i_1}(t_2, q_{\theta_1}(S_i(t_1, y)))) \cdot \ldots \cdot p_{\theta_n}((\mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}} \circ \mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i)),$$

$$\Sigma_n(y, i, \mathbf{i_{n-1}}, \boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{\theta_{n-1}}) = e^{-L(t_1, y, i)}e^{-L(t_2, q_{\theta_1}(S_i(t_1, y)), i_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-L(t_n, (\mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_{n-1}}} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-2}}})(\boldsymbol{t_{n-1}}, y, i), i_{n-1})}.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ φ jest ciągła i niemalejąca oraz $\varphi(0) = 0$, możemy dobrać takie $\tilde{\varepsilon} > 0$, że $\varphi(\tilde{\varepsilon}) < \varepsilon$. Korzystając z tego, że $L_q < 1$, dobierzmy takie $n \in \mathbb{N}$, że

$$L_q^n \mathrm{diam}_{\rho_c} F < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \tag{2.22}$$

Zdefiniujmy zbiór

$$F_Y = \{y \in Y : (y, i) \in F \ \text{ dla pewnego } i \in I\}.$$

Z ciągłości funkcji $(y, \theta) \to q_\theta(y)$, $(t, y) \to S_i(t, y)$, oraz ze zwartości zbioru F_Y, istnieje taka stała $\delta > 0$, że

$$\rho((\mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_n}} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i), \mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_n}}(y)) \leqslant \frac{\tilde{\varepsilon}}{8} \tag{2.23}$$

dla dowolnych $i \in I$, $\mathbf{i_{n-1}} \in I^{n-1}$, $\boldsymbol{\theta_n} \in \Theta^n$, $\boldsymbol{t_n} \in [0, \delta]^n$ oraz $y \in F_Y$.

Dla każdego $z \in F_Y$ definiujemy zbiór

$$U(z) = \{y \in F_Y : \rho(\mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_n}}(z), \mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_n}}(y)) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{8} \ \text{ dla } \boldsymbol{\theta_n} \in \Theta^n\}. \tag{2.24}$$

Wobec zwartości zbioru F_Y, istnieją takie $z_1, \ldots, z_{m_0} \in F_Y$, że

$$F \subset \bigcup_{l=1}^{m_0} (U(z_l) \times I) := G, \tag{2.25}$$

przy czym zbiór G jest zbiorem otwartym w X.

Niech $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(X)$. Rozważmy $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$. Z twierdzenia 1.24(ii) wnioskujemy, że $L(\mu) \neq \emptyset$. Możemy zatem wybrać taki dążący do ∞ ciąg liczb naturalnych n_k, że $\mu P^{n_k} \xrightarrow{w} \nu$ dla pewnej miary $\nu \in L(\mu)$. Korzystając z twierdzenia Aleksandrowa otrzymujemy

$$\liminf_{k \to \infty} \mu P^{n_k}(G) \geqslant \nu(G) \geqslant \frac{4}{5}.$$

Stąd, możemy wskazać takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$\mu P^{n_0}(G) = \frac{\mu_1 P^{n_0}(G) + \mu_2 P^{n_0}(G)}{2} \geqslant \frac{3}{4},$$

co w szczególności zapewnia, że

$$\mu_k P^{n_0}(G) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{dla } k = 1, 2.$$

Zważywszy na definicję (2.25) zbioru G oraz powyższą nierówność, stwierdzamy, że istnieją takie $l_1, l_2 \in \{1, \dots, m_0\}$ oraz $j_1,\ j_2 \in I$, że

$$\mu_k P^{n_0}(V_k) \geqslant \frac{1}{2m_0 N} \quad \text{dla } k = 1, 2, \tag{2.26}$$

gdzie

$$V_k = U(z_{l_k}) \times \{j_k\} \quad \text{dla } k = 1, 2.$$

Korzystając z założenia $(A3)$ wnioskujemy, że istnieje takie $\theta_{01} \in \Theta$, że

$$\rho(q_{\theta_{01}}(z_{l_1}), q_{\theta_{01}}(z_{l_2})) \leqslant L_q \rho(z_{l_1}, z_{l_2}).$$

Istotnie, gdyby dla pewnych $y_1, y_2 \in Y$ oraz wszystkich $\theta \in \Theta$ zachodziła nierówność

$$\rho(q_\theta(y_1)), q_\theta(y_2)) > L_q \rho(y_1, y_2),$$

to z założenia $(A3)$ mielibyśmy

$$L_q \rho(y_1, y_2) \geqslant \sum_{\theta \in \Theta} \rho(q_\theta(y_1), q_\theta(y_2)) p_\theta(y_1) > \sum_{\theta \in \Theta} L_q \rho(y_1, y_2) p_\theta(y_1),$$

co dawałoby sprzeczność, ponieważ $1 = \sum_{\theta \in \Theta} p_\theta(y_1) < 1$. Analogicznie, dla $q_{\theta_{01}}(z_{l_1})$ oraz $q_{\theta_{01}}(z_{l_2})$, możemy wybrać takie $\theta_{02} \in \Theta$, że

$$\rho(q_{\theta_{02}}(q_{\theta_{01}}(z_{l_1})), q_{\theta_{02}}(q_{\theta_{01}}(z_{l_2}))) \leqslant L_q \rho(q_{\theta_{01}}(z_{l_1}), q_{\theta_{01}}(z_{l_2})).$$

Kontynuując tę procedurę indukcyjnie, znajdziemy takie $\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}} = (\theta_{01}, \dots, \theta_{0n}) \in \Theta^n$, że

$$\rho(\mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}}(z_{l_1}), \mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}}(z_{l_2})) \leqslant L_q^n \rho(z_{l_1}, z_{l_2}). \tag{2.27}$$

Zdefiniujmy zbiór

$$A = (B(\mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}}(z_{l_1}), \frac{\tilde{\varepsilon}}{4}) \cup B(\mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}}(z_{l_2}), \frac{\tilde{\varepsilon}}{4})) \times \{\bar{i}\}.$$

Na mocy (2.22) oraz (2.27) mamy $\operatorname{diam}_{\varphi\circ\rho_c} A < \varphi(\tilde{\varepsilon}) < \varepsilon$. Korzystając teraz z (2.23) oraz (2.24), dla dowolnych $y \in U(z_{l_k})$, $k = 1, 2$, $i \in I$, $\mathbf{i_{n-1}} \in I^{n-1}$, $\boldsymbol{t_n} \in [0, \delta]^n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\rho((\mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_n} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i),\ \mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_n}(z_{l_k})) \leqslant \rho((\mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_n} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i), \mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_n}(y))\\ &+ \rho(\mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_n}(y), \mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_n}(z_{l_k})) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{4}.\end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że $((\mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_n} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i), \bar{i}) \in A$ dla dowolnych $y \in U(z_{l_k})$, $i \in I$, $\mathbf{i_{n-1}} \in I^{n-1}$, $k = 1, 2$ oraz $\boldsymbol{t_n} \in [0, \delta]^n$. Zestawiając powyższą obserwację z (2.26) oraz z założeniami (2.20) i (2.21) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu_k P^{n_0+n}(A) &= \sum_{\mathbf{i_n} \in I^n} \int_X \int_{\mathbb{R}_+^n} \sum_{\boldsymbol{\theta_n} \in \Theta^n} \mathbb{1}_A((\mathbf{q}_{\boldsymbol{\theta_n}} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i), i_n)\\ &\times \Pi_n(y, i, \mathbf{i_n}, \boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{\theta_n}) \Lambda_n(y, i, \mathbf{i_{n-1}}, \boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{\theta_{n-1}}) P(y, i, \mathbf{i_{n-1}}, \boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{\theta_n})\\ &\times \Sigma_n(y, i, \mathbf{i_{n-1}}, \boldsymbol{t_n}, \boldsymbol{\theta_{n-1}}) d\boldsymbol{t_n} (\mu_k P^{n_0})(dy, di)\\ &\geqslant \underline{\lambda}^n \delta_p^n \sum_{\mathbf{i_{n-1}} \in I^{n-1}} \int_{V_k} \int_{[0,\delta]^n} \mathbb{1}_A((\mathbf{q}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_n} \circ \mathbf{S}_{\mathbf{i_{n-1}}})(\boldsymbol{t_n}, y, i), \bar{i})\\ &\times \Pi(y, i, (\mathbf{i_{n-1}}, \bar{i}), \boldsymbol{t}_n, \overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{n}}) e^{-\overline{\lambda}(t_1+\ldots+t_n)} d\boldsymbol{t_n} \mu_k P^{n_0}(dy, di)\\ &\geqslant \underline{\lambda}^n \delta_p^n \delta_\pi \int_{[0,\delta]^n} e^{-\overline{\lambda}(t_1+\ldots+t_n)} d\boldsymbol{t} (\mu_k P^{n_0})(V_k) \geqslant \delta_p^n \delta_\pi \left(\underline{\lambda}\overline{\lambda}^{-1}\right)^n \frac{\left(1 - e^{-\overline{\lambda}}\right)^n}{2m_0 N} =: \gamma.\end{aligned}$$

Stała γ nie zależy od wyboru μ_k dla $k = 1, 2$ co kończy dowód. □

2.2 Geometryczna ergodyczność

W tej części pracy skupimy się na wykazaniu geometrycznej ergodyczności operatora $(\cdot)P$, w przypadku gdy Θ jest dowolną przestrzenią topologiczną z miarą $\sigma-$skończoną Δ. Wprowadzone w rozdziale 2 założenia (A1)$-$(A5) uzupełniamy o warunek:

$(A2')$ Istnieje taka funkcja $\mathcal{L} : Y \to \mathbb{R}_+$ ograniczona na zbiorach ograniczonych, że

$$\rho(S_i(t, y), S_j(t, y)) \leqslant t\mathcal{L}(y) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+,\ y \in Y,\ i, j \in I.$$

W tym przypadku operator Markowa (2.5) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\mu P(A) = \sum_{j \in I} \int_\Theta \int_X \int_0^\infty &\mathbb{1}_A(q_\theta(S_i(t, y)), j) \lambda(S_i(t, y)) e^{-L(t,y,i)}\\ &\times \pi_{ij}(q_\theta(S_i(t, y)) p_\theta(S_i(t, y)) dt \mu(dy, di) \Delta(d\theta)\end{aligned} \tag{2.28}$$

dla $\mu \in \mathcal{M}(X)$ oraz $A \in \mathcal{B}(X)$, a operator dualny $P(\cdot) : B(X) \to B(X)$ jest dany wzorem

$$\begin{aligned}Pf(y, i) = \sum_{j \in I} \int_\Theta \int_0^\infty &f(q_\theta(S_i(t, y)), j) \lambda(S_i(t, y)) e^{-L(t,y,i)}\\ &\times \pi_{ij}(q_\theta(S_i(t, y)) p_\theta(S_i(t, y)) dt \Delta(d\theta)\end{aligned}$$

dla $f \in B(X)$ oraz $(y,i) \in X$.

Metrykę ρ_c, zadaną wzorem (2.1), będziemy rozpatrywać ze stałą c, spełniającą nierówność

$$c \geqslant \max\left\{\frac{\overline{\lambda}}{\underline{\lambda}-\alpha}, \sup T, \frac{1}{\underline{\lambda}}\right\}\frac{(\underline{\lambda}-\alpha)M_{\mathcal{L}}}{\underline{\lambda}L} + \frac{2(\underline{\lambda}-\alpha)}{\underline{\lambda}L}, \tag{2.29}$$

gdzie $T \subset \mathbb{R}_+$ jest pewnym ustalonym zbiorem ograniczonym, o tej własności, że

$$e^{\alpha t} \leqslant \frac{\overline{\lambda}}{\underline{\lambda}-\alpha} \quad \text{dla każdego } t \in T, \tag{2.30}$$

oraz

$$M_{\mathcal{L}} := \sup\{\mathcal{L}(y) : \rho(y, y_*) < R\},$$

gdzie $R := \frac{4b}{1-a}$, a stałe a, b zdefiniowane są równościami (2.6).

Dla przejrzystości zapisu, dla $x_1 = (y_1, i_1)$, $x_2 = (y_2, i_2) \in X$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \Theta$ przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}_\theta(x_1, x_2, t) = p_\theta(S_{i_1}(t, y_1)) \wedge p_\theta(S_{i_2}(t, y_2)),\\
&\boldsymbol{\pi}_j(x_1, x_2, t, \theta) = \pi_{i_1 j}(q_\theta(S_{i_1}(t, y_1))) \wedge \pi_{i_2 j}(q_\theta(S_{i_2}(t, y_2))),\\
&\mathbf{q}_j(x_1, x_2, t, \theta) = ((q_\theta(S_{i_1}(t, y_1)), j), (q_\theta(S_{i_2}(t, y_2)), j)),\\
&\boldsymbol{\lambda}(x_1, x_2, t) = \lambda(S_{i_1}(t, y_1)) \wedge \lambda(S_{i_2}(t, y_2)),\\
&\boldsymbol{L}(x_1, x_2, t) = e^{-L(t, y_1, i_1)} \wedge e^{-L(t, y_2, i_2)}.
\end{aligned}$$

gdzie $\wedge, \vee$ oznaczają odpowiednio minimum i maximum.

W przestrzeni X^2 rozpatrujemy metrykę

$$\overline{\rho}_c((x_1, x_2), (z_1, z_2)) = \rho_c(x_1, z_1) + \rho_c(x_2, z_2) \quad \text{dla } (x_1, z_1), (z_2, z_2) \in X^2.$$

Dla $t \in \mathbb{R}_+$ rozważmy funkcje $\Gamma_t : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ opisaną wzorem

$$\Gamma_t(x_1, x_2, A) = \sum_{j \in I} \int_\Theta \mathbb{1}_A(\mathbf{q}_j(x_1, x_2, t, \theta)) \boldsymbol{\pi}_j(x_1, x_2, t, \theta) \mathbf{p}_\theta(x_1, x_2, t) \Delta(d\theta),$$

oraz $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ daną wzorem

$$Q(x_1, x_2, A) = \int_0^\infty \boldsymbol{\lambda}(x_1, x_2, t) \boldsymbol{L}(x_1, x_2, t) \Gamma_t((x_1, x_2), A) dt. \tag{2.31}$$

Oczywiście, funkcja Q jest jądrem podstochastycznym, które spełnia warunki (1.5).

Przejdźmy do sformułowania głównego twierdzenia w tej części pracy.

Twierdzenie 2.6. *Przypuśćmy, że spełnione są warunki warunki* $(A1)-(A5)$ *oraz* $(A2')$*, przy czym dla stałych* α*,* L*, i* L_q *zachodzi nierówność* (2.7)*, a funkcje* Ψ_1 *i* Ψ_2 *występujące w* (A5) *mają postać* $\psi_1(t) = L_\pi t$ *oraz* $\psi_2(t) = L_p t$*. Ponadto, załóżmy, że istnieją takie stałe* δ_π *i* δ_p*, że*

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in I} \min\{\pi_{i_1 j}(y_1), \pi_{i_2 j}(y_2)\} \geqslant \delta_\pi \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y \text{ oraz } i_1, i_2 \in I, \\ &\int_{\Theta(y_1,y_2)} \min\{p_\theta(y_1), p_\theta(y_2)\}\Delta(d\theta) \geqslant \delta_p \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y, \end{aligned} \tag{2.32}$$

gdzie $\Theta(y_1, y_2) = \{\theta \in \Theta : \rho(q_\theta(y_1), q_\theta(y_2)) \leqslant \rho(y_1, y_2)\}$*. Wówczas operator Markowa* $(\cdot)P$ *postaci* (2.28)*, posiada dokładnie jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną* μ_**. Ponadto* $\mu_* \in \mathcal{M}_1^{\rho_c,1}(X)$ *oraz istnieją takie* $x_* \in X$*,* $C \in \mathbb{R}$ *oraz* $\beta \in [0, 1)$*, że*

$$||\mu P^n - \mu_*||_{FM} \leqslant C\beta^n \Big(\int_X \rho_c(x_*, x)(\mu + \mu_*)(dx) + 1\Big) \tag{2.33}$$

dla każdej miary $\mu \in \mathcal{M}_1^{\rho_c,1}(X)$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Pokażemy, że dla P i Q zdefiniowanych odpowiednio wzorami (2.4) oraz (2.31) spełnione są warunki (B1)−(B5) twierdzenia 1.25. Fellerowskość operatora $(\cdot)P$ wynika z założonej ciągłości dla funkcji: $y \to \pi_{ij}(y)$, $y \mapsto S_i(t, y)$, $y \mapsto p_\theta(y)$ oraz $y \to q_\theta(y)$ dla wszystkich $i, j \in I$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \Theta$. Z nierówności (2.7) wynika, że $\alpha < \underline{\lambda}$ co gwarantuje, że całka $\int_0^\infty e^{(\alpha-\underline{\lambda})t} dt$ jest skończona.

Krok 1. Na podstawie lematu 2.1, warunek (B1) jest spełniony dla funkcji Lapunowa V danej wzorem $V(y, i) = \rho(y, y_*)$, gdzie y_* jest punktem spełniającym warunek $(A1)$, zaś i_* dowolnie ustalonym elementem zbioru I. Definiując $x_* := (y_*, i_*)$, otrzymujemy $V(x) \leqslant \rho_c(x_*, x)$ dla każdego $x \in X$, a zatem teza twierdzenia 1.25 w istocie zapewnia nierówność (2.33).

Krok 2. Niech $R := 4b/(1 - a)$ oraz rozważmy następujące podzbiory przestrzeni X^2:

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{((y_1, i_1), (y_2, i_2)) : i_1 = i_2\}, \\ F_2 &:= \{((y_1, i_1), (y_2, i_2)) : V(y_1, i_1) + V(y_2, i_2) < R\}. \end{aligned}$$

Ponadto zdefiniujmy $F := F_1 \cup F_2$.

Najpierw pokażemy, że

$$\operatorname{supp} Q(x_1, x_2, \cdot) \subset F \quad \text{dla każdego } (x_1, x_2) \in X^2.$$

Niech $(x_1, x_2) := ((y_1, i_1), (y_2, i_2)) \in X^2$ oraz $(z_1, z_2) := ((u_1, k_1), (u_2, k_2)) \in X^2 \backslash F$. Dla $k_1 \neq k_2$, otrzymujemy

$$\overline{\rho}_c(\mathbf{q}_j(x_1, x_2, t, \theta), (z_1, z_2)) \geqslant c(\delta(j, k_1) + \delta(j, k_2)) \geqslant c \quad \text{dla } j \in I,\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Zatem dla $\gamma \in (0, c)$ mamy

$$\mathbf{q}_j(x_1, x_2, t, \theta) \notin B((z_1, z_2), \gamma) \quad \text{dla każdego } j \in I \text{ oraz } t \in \mathbb{R}_+.$$

Stąd $\Gamma_t(x_1, x_2, B((z_1, z_2), \gamma)) = 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$, a w konsekwencji

$$Q(x_1, x_2, B((z_1, z_2), \gamma)) = 0.$$

Zatem $(z_1, z_2) \in X^2 \setminus \operatorname{supp} Q(x_1, x_2, \cdot)$ co wobec dowolności wyboru $(z_1, z_2) \in X^2 \setminus F$ dowodzi, że $\operatorname{supp} Q(x_1, x_2, \cdot) \subset F$ dla każdego $(x_1, x_2) \in X^2$.

Rozważmy łańcuch sprzęgający $\{(X_n^1, X_n^2)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dla P o takiej funkcji przejścia B, że $Q \leqslant B$. Niech

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : (X_n^1, X_n^2) \in F, \;\; V(X_n^1) + V(X_n^2) < R\}.$$

Zdefiniujmy funkcję Lapunowa $\overline{V} : X^2 \to \mathbb{R}_+$ postaci

$$\overline{V}(x_1, x_2) = V(x_1) + V(x_2) \quad \text{dla } (x_1, x_2) \in X^2.$$

Ponieważ $\overline{V}(x_1, x_2) < R$ dla $(x_1, x_2) \in F$, otrzymujemy

$$\tau = \inf\{n \in N_0 : \overline{V}(X_n^1, X_n^2) < R\}.$$

Korzystając z (1.6), mamy

$$B\overline{V}(x_1, x_2) \leqslant \overline{V}(x_1, x_2) + 2b \quad \text{dla } (x_1, x_2) \in X^2.$$

Ostatecznie, na mocy lematu 1.26, założenie (B2) twierdzenia 1.25 jest spełnione.

Krok 3. Niech $(x_1, x_2) := ((y_1, i_1), (y_2, i_2)) \in F$. Z założenia $(A3)$ mamy

$$\begin{aligned}
\Gamma_t \rho_c(x_1, x_2) &= \int_\Theta \rho_c(\mathbf{q}_j(x_1, x_2, t, \theta)) \mathbf{p}_\theta(x_1, x_2, t) \Big[\sum_{j \in I} \boldsymbol{\pi}_j(x_1, x_2, t, \theta) \Big] \Delta(d\theta) \\
&\leqslant \int_\Theta \rho(q_\theta(S_{i_1}(t, y_1)), q_\theta(S_{i_2}(t, y_2))) p_\theta(S_{i_1}(t, y_1)) \, \Delta(d\theta) \\
&\leqslant L_q \rho(S_{i_1}(t, y_1), S_{i_2}(t, y_2)) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Dla $i_1 \neq i_2$ mamy $(x_1, x_2) \in F \setminus F_1 = F_2$, a stąd $\mathcal{L}(y_2) \leqslant M_{\mathcal{L}}$. Na mocy założeń $(A2)$ i $(A2')$ otrzymujemy

$$\rho(S_{i_1}(t, y_1), S_{i_2}(t, y_2)) \leqslant L e^{\alpha t} \rho(y_1, y_2) + t M_{\mathcal{L}} \delta(i_1, i_2) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.35}$$

Zatem z oszacowania (2.34) wynika, że

$$\Gamma_t q_c(x_1, x_2) \leqslant L_q(L e^{\alpha t} \rho(y_1, y_2) + t M_{\mathcal{L}} \delta(i_1, i_2)) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.36}$$

Mając teraz na uwadze założenia (2.2) oraz (2.29) otrzymujemy, że

$$
\begin{aligned}
Qq_c(x_1,x_2) &\leqslant \int_0^\infty \lambda(S_i(t,y))e^{-L(t,y,i)}\,\Gamma_t q_c(x_1,x_2)dt \\
&\leqslant \int_0^\infty \overline{\lambda}e^{-\underline{\lambda}t}\,\Gamma_t q_c(x_1,x_2)dt \\
&\leqslant \overline{\lambda}LL_q\Big[\int_0^\infty e^{(\alpha-\underline{\lambda})t}\,dt\,\rho(y_1,y_2)+\frac{M_{\mathcal{L}}}{L}\int_0^\infty te^{\underline{\lambda}t}\,dt\,\delta(i_1,i_2)\Big] \\
&\leqslant \frac{\overline{\lambda}LL_q}{\underline{\lambda}-\alpha}(\rho(y_1,y_2)+\frac{(\underline{\lambda}-\alpha)M_{\mathcal{L}}}{\underline{\lambda}^2L}\delta(i_1,i_2))\leqslant q\rho_c(x_1,x_2).
\end{aligned}
$$

Krok 4. Niech $T\subset\mathbb{R}_+$ będzie ograniczonym zbiorem o dotatniej mierze Lebesgue'a, dla którego zachodzi (2.30) oraz niech

$$
\delta:=\delta_\pi\delta_p\int_T\underline{\lambda}e^{-\overline{\lambda}t}dt.
$$

Korzystając z (2.7) oraz (2.30) otrzymujemy

$$
LL_qe^{\alpha t}\leqslant a\quad\text{dla } t\in T. \tag{2.37}
$$

Niech $(x_1,x_2)=((y_1,i_1),(y_2,i_2))\in F$. Zdefiniujmy zbiór

$$
U:=\{(u_1,u_2)\in X^2:\rho_c(u_1,u_2)\leqslant a\rho_c(x_1,x_2).\}
$$

Pokażemy, że $Q(x_1,x_2,U)\geqslant\delta$. Rozważmy w tym celu zbiory postaci:

$$
R_1(t)=\{\theta\in\Theta:\rho(q_\theta(S_{i_1}(t,y_1)),q_\theta(S_{i_2}(t,y_2)))\leqslant L_q\rho(S_{i_1}(t,y_1),S_{i_2}(t,y_2))\},
$$

$$
R_2(t)=\{\theta\in\Theta:\rho(q_\theta(S_{i_1}(t,y_1)),q_\theta(S_{i_2}(t,y_2)))\leqslant a\rho_c(x_1,x_2)\}.
$$

Pokażemy, że dla dowolnego $t\in T$ zachodzi inkluzja $R_1(t)\subset R_2(t)$. W tym celu ustalmy $t\in T$ oraz $\theta\in R_1(t)$. Korzystając z założenia (A3) oraz biorąc pod uwagę oszacowania (2.35), (2.37) i warunek (2.29) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\rho(q_\theta(S_{i_1}(t,y_1)),q_\theta(S_{i_2}(t,y_2))) &\leqslant L_q\rho(S_{i_1}(t,y_1),S_{i_2}(t,y_2)) \\
&\leqslant L_qLe^{\alpha t}\rho(y_1,y_2)+L_qM_{\mathcal{L}}\sup T\delta(i_1,i_2) \\
&\leqslant a\rho(y_1,y_2)+\frac{\overline{\lambda}LL_q}{\underline{\lambda}-\alpha}\frac{(\underline{\lambda}-\alpha)M_{\mathcal{L}}}{\overline{\lambda}L}\sup T\delta(i_1,i_2) \\
&\leqslant a\rho(y_1,y_2)+ac\delta(i_1,i_2)=a\rho_c(x_1,x_2),
\end{aligned}
$$

co dowodzi postulowanej inkluzji.

Ponieważ $R_2(t)=\{\theta\in\Theta:\ \boldsymbol{q}_j(x_1,x_2,t,\theta)\in U\}$, więc

$$
\mathbb{1}_U(\mathbf{q}_j(x_1,x_2,t,\theta))=\mathbb{1}_{R_2(t)}(\theta)\geqslant\mathbb{1}_{R_1(t)}(\theta).
$$

Zważywszy zatem na fakt, iż $R_1(t) = \Theta(S_{i_1}(t, y_1), S_{i_2}(t, y_2))$ oraz założenie (2.32), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Gamma_t(x_1, x_2, U) &= \sum_{j\in I} \int_\Theta \mathbb{1}_U(\mathbf{q}_j(x_1, x_2, t, \theta))\boldsymbol{\pi}_j(x_1, x_2, t, \theta)\mathbf{p}_\theta(x_1, x_2, t)\,\Delta(d\theta) \\ &\geqslant \delta_\pi \int_{R_1(t)} \mathbf{p}_\theta(x_1, x_2, t)\Delta(d\theta) = \delta_\pi\delta_p.\end{aligned}$$

Ostatecznie, korzystając z (2.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}Q(x_1, x_2, U) &\geqslant \int_T \boldsymbol{\lambda}(x_1, x_2, t)\boldsymbol{L}(x_1, x_2, t)\Gamma_t(x_1, x_2, U)dt \\ &\geqslant \delta_\pi\delta_p \int_T \underline{\lambda} e^{-\overline{\lambda}t} dt = \delta,\end{aligned}$$

co kończy dowód warunku (B4).

Krok 5. Ustalmy $(x_1, x_2) := ((y_1, i_1), (y_2, i_2)) \in F$ oraz przyjmijmy oznaczenia

$$z_1(t) := S_{i_1}(t, y_1) \quad \text{oraz } z_2(t) := S_{i_2}(t, y_2) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+.$$

Wykorzystując nierówność

$$(u_1 \wedge u_2)(v_1 \wedge v_2) \geqslant u_1v_1 - u_1|v_1 - v_2| - v_1|u_1 - u_2| \tag{2.38}$$

otrzymujemy następujące oszacowanie dla $\Gamma_t(x_1, x_2, X^2)$, mianowicie

$$\begin{aligned}\Gamma_t(x_1, x_2, X^2) &= \sum_{j\in I} \boldsymbol{\pi}_j(x_1, x_2, t, \theta)\mathbf{p}_\theta(x_1, x_2, t)\Delta(d\theta) \\ &\geqslant \sum_{j\in I} \int_\Theta \pi_{i_1j}(q_\theta(z_1(t)))p_\theta(z_1(t))\,\Delta(d\theta) \\ &- \sum_{j\in I} \int_\Theta \pi_{i_1j}(q_\theta(z_1(t)))|p_\theta(z_1(t)) - p_\theta(z_2(t))|\,\Delta(d\theta) \\ &- \sum_{j\in I} \int_\Theta |\pi_{i_1j}(q_\theta(z_1(t))) - \pi_{i_2j}(q_\theta(z_2(t)))|p_\theta(z_1(t))\,\Delta(d\theta).\end{aligned}$$

Oczywiście

$$C_1(t) = \sum_{j\in I} \int_\Theta \pi_{i_1j}(q_\theta(z_1(t)))p_\theta(z_1(t))\,\Delta(d\theta) = 1 \quad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R}_+.$$

Wobec założenia (A5) otrzymujemy

$$\begin{aligned}C_2(t) &= \sum_{j\in I} \int_\Theta \pi_{i_1j}(q_\theta(z_1(t)))|p_\theta(z_1(t)) - p_\theta(z_2(t))|\,\Delta(d\theta) = \int_\Theta |p_\theta(z_1(t)) - p_\theta(z_2(t))|\,\Delta(d\theta) \\ &\leqslant L_p\rho(z_1(t), z_2(t)).\end{aligned}$$

Z kolei, z założeń (A3) oraz (A5) mamy

$$\begin{aligned}C_3(t) =& \sum_{j\in I}\int_\Theta |\pi_{i_1 j}(q_\theta(z_1(t))) - \pi_{i_2 j}(q_\theta(z_2(t)))| p_\theta(z_1(t))\,\Delta(d\theta)\\ &\leqslant \int_\Theta \Big[\sum_{j\in I}|\pi_{i_1 j}(q_\theta(z_1(t))) - \pi_{i_1 j}(q_\theta(z_2(t)))|\Big] p_\theta(z_1(t))\,\Delta(d\theta)\\ &+ \delta(i_1,i_2)\int_\Theta \Big[\sum_{j\in I}|\pi_{i_1 j}(q_\theta(z_2(t))) - \pi_{i_2 j}(q_\theta(z_2(t)))|\Big] p_\theta(z_1(t))\,\Delta(d\theta)\\ &\leqslant L_\pi \int_\Theta \rho(q_\theta(z_1(t)), q_\theta(z_2(t))) p_\theta(z_1(t))\,\Delta(d\theta) + 2\delta(i_1,i_2)\\ &\leqslant L_q L_\pi \rho(z_1(t), z_2(t)) + 2\delta(i_1,i_2).\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\Gamma_t(x_1,x_2,X^2) &\geqslant C_1(t) - C_2(t) - C_3(t)\\ &\geqslant 1 - (Lp + L_q L_\pi)\rho(S_{i_1}(t,y), S_{i_2}(t,y)) - 2\delta(i_1,i_2)\\ &\geqslant 1 - (Lp + L_q L_\pi + 1)\left[\rho(S_{i_1}(t,y), S_{i_2}(t,y)) + 2\delta(i_1,i_2)\right].\end{aligned}$$

Zestawiając powyższe oszacowanie z (2.36) otrzymujemy

$$\Gamma_t(x_1,x_2,X^2) \geqslant 1 - L(L_p + L_q L_\pi + 1)\left[e^{\alpha t}\rho(y_1,y_2) + \frac{tM_{\mathcal{L}} + 2}{L}\delta(i_1,i_2)\right]. \tag{2.39}$$

Korzystając po raz kolejny z nierówności (2.38) mamy

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \boldsymbol{\lambda}(x_1,x_2,t)\boldsymbol{L}(x_1,x_2,t)\,dt \geqslant \int_0^\infty \lambda(z_1(t))e^{-\int_0^t \lambda(z_1(s))\,ds}\,dt\\ &-\int_0^\infty \lambda(z_1(t))\left|e^{-\int_0^t \lambda(z_1(s))\,ds} - e^{-\int_0^t \lambda(z_2(s))\,ds}\right| dt - \int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda(z_1(s))\,ds}|\lambda(z_1(t)) - \lambda(z_2(t))|\,dt.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Przyjmując

$$I_1 = \int_0^\infty \lambda(z_1(t))e^{-\int_0^t \lambda(z_1(s))\,ds}\,dt$$

otrzymujemy, że

$$I_1 = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}e^{-\int_0^t \lambda(z_1(s))\,ds} = 1. \tag{2.41}$$

Niech

$$I_2 := \int_0^\infty \lambda(z_1(t))\left|e^{-\int_0^t \lambda(z_1(s))\,ds} - e^{-\int_0^t \lambda(z_2(s))\,ds}\right| dt.$$

Korzystając z nierówności

$$|e^u - e^v| \leqslant e^{\max(u,v)}|u - v| \quad \text{dla } u,v \in \mathbb{R},$$

otrzymujemy

$$I_2 \leqslant \overline{\lambda} \int_0^\infty e^{\max\left(-\int_0^t \lambda(z_1(s))\,ds,\, -\int_0^t \lambda(z_2(s))\,ds\right)} \left[\int_0^t |\lambda(z_1(s)) - \lambda(z_2(s))|\,ds\right] dt.$$

Korzystając teraz z założenia (A4) oraz (2.2) dostajemy

$$I_2 \leqslant \overline{\lambda} L_\lambda \int_0^\infty e^{-\underline{\lambda} t} \left[\int_0^t \rho(S_{i_1}(s, y_1), S_{i_2}(s, y_2))\,ds\right] dt.$$

Zestawiając powyższe oszacowanie z założeniami (A2) i $(A2')$ mamy

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant \overline{\lambda} L_\lambda \int_0^\infty e^{-\underline{\lambda} t} \left[\int_0^t (Le^{\alpha s}\rho(y_1, y_2) + M_{\mathcal{L}} s\, \delta(i_1, i_2))\,ds\right] dt \\
&\leqslant \overline{\lambda} L_\lambda \int_0^\infty e^{-\underline{\lambda} t} \left[\frac{L}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)\rho(y_1, y_2) + \frac{M_{\mathcal{L}}}{2} t^2 \delta(i_1, i_2)\right] dt \\
&= \overline{\lambda} L_\lambda \left[\frac{L}{\alpha} \int_0^\infty (e^{(\alpha - \underline{\lambda})t} - e^{-\underline{\lambda} t})\,dt\, \rho(y_1, y_2) + \frac{M_{\mathcal{L}}}{2} \int_0^\infty t^2 e^{-\underline{\lambda} t}\,dt\, \delta(i_1, i_2)\right] \\
&= \overline{\lambda} L_\lambda \left[\frac{L}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda} - \alpha)}\rho(y_1, y_2) + \frac{M_{\mathcal{L}}}{\underline{\lambda}^3}\delta(i_1, i_2)\right] \\
&= \frac{\overline{\lambda} L L_\lambda}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda} - \alpha)} \left[\rho(y_1, y_2) + \frac{M_{\mathcal{L}}(\underline{\lambda} - \alpha)}{L\underline{\lambda}^2}\delta(i_1, i_2)\right],
\end{aligned}$$

co wraz z założeniem (2.29) daje

$$I_2 \leqslant \frac{\overline{\lambda} L L_\lambda}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda} - \alpha)} \rho_c(x_1, x_2). \tag{2.42}$$

Niech

$$I_3 := \int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda(z_1(s))\,ds} |\lambda(z_1(t)) - \lambda(z_2(t))|\,dt.$$

Korzystając kolejno z (2.2), (A4) oraz (A2) i $(A2')$ dostajemy

$$\begin{aligned}
I_3 &\leqslant L_\lambda \int_0^\infty e^{-\underline{\lambda} t} \rho(S_{i_1}(t, y_1), S_{i_2}(t, y_2))dt \\
&\leqslant L_\lambda \int_0^\infty e^{-\underline{\lambda} t} (Le^{\alpha t}\rho(y_1, y_2) + M_{\mathcal{L}} t \delta(i_1, i_2))dt \\
&\leqslant L_\lambda \frac{L}{\underline{\lambda} - \alpha} \left(\rho(y_1, y_2) + \frac{M_{\mathcal{L}}}{\underline{\lambda}^2}\delta(i_1, i_2)\right) \\
&\leqslant \frac{L L_\lambda}{\underline{\lambda} - \alpha} \left(\rho(y_1, y_2) + \frac{M_{\mathcal{L}}(\underline{\lambda} - \alpha)}{L\underline{\lambda}^2}\delta(i_1, i_2)\right).
\end{aligned}$$

Zatem, biorąc pod uwagę (2.29), widzimy, że

$$I_3 \leqslant \frac{L L_\lambda}{\underline{\lambda} - \alpha} \rho_c(x_1, x_2) \leqslant \frac{\overline{\lambda} L L_\lambda}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda} - \alpha)} \rho_c(x_1, x_2). \tag{2.43}$$

Korzystając kolejno z (2.40), (2.41), (2.42) oraz (2.43) otrzymujemy

$$\int_0^\infty \boldsymbol{\lambda}(x_1,x_2,t)\boldsymbol{L}(x_1,x_2,t)\,dt \geqslant 1 - \frac{2\overline{\lambda}LL_\lambda}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda}-\alpha)}\rho_c(x_1,x_2).$$

Biorąc teraz pod uwagę otrzymaną wyżej nierówność oraz założenie (2.2) i oszacowanie (2.39), mamy

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2,X^2) &= \int_0^\infty \boldsymbol{\lambda}(x_1,x_2,t)\boldsymbol{L}(x_1,x_2,t)\Gamma_t(x_1,x_2,X^2)\,dt\\ &\geqslant 1 - \frac{2\overline{\lambda}LL_\lambda}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda}-\alpha)}\rho_c(x_1,x_2) - \int_0^\infty \overline{\lambda}\,e^{\underline{\lambda}t}L(L_p+L_qL_\pi+1)\left[e^{\alpha t}\rho(y_1,y_2)+\frac{tM_{\mathcal{L}}+2}{L}\delta(i_1,i_2)\right]dt.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy

$$I_0 := \int_0^\infty \overline{\lambda}\,e^{\underline{\lambda}t}L(L_p+L_qL_\pi+1)\left[e^{\alpha t}\rho(y_1,y_2)+\frac{tM_{\mathcal{L}}+2}{L}\delta(i_1,i_2)\right]dt.$$

Po obliczeniu całki oraz zastosowaniu (2.29) otrzymujemy

$$\begin{aligned}I_0 &= \overline{\lambda}L(L_p+L_qL_\pi+1)\left[\frac{1}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho(y_1,y_2)+\left(\frac{M_{\mathcal{L}}}{L\underline{\lambda}^2}+\frac{2}{L\underline{\lambda}}\right)\delta(i_1,i_2)\right]\\ &= \frac{\overline{\lambda}L(L_p+L_qL_\pi+1)}{\underline{\lambda}-\alpha}\left[\rho(y_1,y_2)+\left(\frac{(\underline{\lambda}-\alpha)M_{\mathcal{L}}}{L\underline{\lambda}^2}+\frac{2(\underline{\lambda}-\alpha)}{L\underline{\lambda}}\right)\delta(i_1,i_2)\right]\\ &\geqslant \frac{\overline{\lambda}L(L_p+L_qL_\pi+1)}{\underline{\lambda}-\alpha}\rho_c(x_1,x_2).\end{aligned}$$

Ostatecznie wnioskujemy, że

$$Q(x_1,x_2,X^2) \geqslant 1 - \left(\frac{2\overline{\lambda}LL_\lambda}{\underline{\lambda}(\underline{\lambda}-\alpha)}+\frac{L(L_p+L_qL_\pi+1)}{\underline{\lambda}-\alpha}\right)\rho_c(x_1,x_2)$$

co stanowi treść warunku (B5). Dowód twierdzenia jest zatem ukończony. □

Wnioskiem z powyższego twierdzenia jest mocne prawo wielkich liczb dla pewnych funkcjonałów łańcucha Markowa o funkcji przejścia zadanej wzorem (2.4). Dowód przeprowadzimy w oparciu o twierdzenie 1.27 autorstwa A. Shirikyana, będącego pewną wersją prawa wielkich liczb.

Wniosek 2.7.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(Y_k,\xi_k) = \langle f,\mu_*\rangle \quad prob_x - \ p.n.,$$

gdzie μ_* jest niezmienniczą miarą probabilistyczną dla operatora $(\cdot)P$ postaci (2.28).

Dowód. Udowodnimy powyższy wniosek, wykazując, że spełnione są warunki twierdzenia 1.27. Na mocy twierdzenia 2.6 wnioskujemy, że dla operatora Markowa $(\cdot)P$ istnieje miara niezmiennicza $\mu_* \in \mathcal{M}_1(X)$. Stąd warunek (C1) twierdzenia 1.27 jest spełniony.

Ponadto, twierdzenie 2.6 gwarantuje istnienie takich stałych $\overline{C} \in \mathbb{R}$ oraz $\beta \in [0,1)$, że

$$\left|\left|\delta_{(y,i)}P^n - \mu_*\right|\right|_{FM} \leqslant \overline{C}\beta^n(\rho(y_*,y)+1) \quad \text{dla każdego } (y,i) \in X,$$

gdzie $y_* \in Y$ jest punktem określonym w założeniu (A1). Istotnie, niech $\bar{x} = (y,i) \in X$ oraz $x_* = (y_*, i_*)$, gdzie $i_* \in I$. Korzystając z twierdzenia 2.6, dla $\mu = \delta_{\bar{x}}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} ||\delta_{\bar{x}}P^n - \mu_*||_{FM} &\leqslant C\beta^n\left[\rho_c(x_*,\bar{x}) + \int_X \rho_c(x_*,x)\mu_*(dx) + 1\right] \\ &\leqslant C\beta^n\Big(\rho(y_*,y) + c + D + 1\Big) \leqslant C(c+D+1)\beta^n(\rho(y_*,y)+1), \end{aligned}$$

gdzie $D = \int_X \rho_c(x_*,x)\mu_*(dx)$ oraz $\overline{C} = C(x+D+1)$. Zdefiniujmy funkcję $g : X \to \mathbb{R}$ następująco:

$$g(y,i) = V(y,i) + 1 \quad \text{dla } (y,i) \in X,$$

gdzie V dana jest wzorem (2.8). Wówczas, dla każdej ograniczonej funkcji lipschitzowskiej f oraz $(y,i) \in X$ zachodzi nierówność:

$$|P^n f(y,i) - \langle f, \mu_*\rangle| \leqslant \overline{C}\beta^n g(y,i)(||f|| + |f|_{Lip}).$$

Wystarczy bowiem zauważyć, że dla $\bar{f} := f/(||f|| + |f|_{Lip})$ mamy $\bar{f} \in \mathcal{F}_{FM}^{\rho_c}(X)$, skąd

$$|P^n\bar{f}(\bar{x}) - \left\langle \bar{f}, \mu_*\right\rangle| \leqslant ||\delta_{\bar{x}}P - \mu_*||_{FM}.$$

Wobec tego warunek (C2) jest spełniony.

Korzystając z lematu 2.1 wnioskujemy, że istnieją takie stałe $a \in (0,1)$, $b > 0$, że $PV(y,i) \leqslant aV(y,i) + b$ dla każdego $(y,i) \in X$. Zatem

$$P^nV(y,i) \leqslant a^nV(y,i) + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k \leqslant V(y,i) + \frac{b}{1-a} \quad \text{dla } (y,i) \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

Na podstawie powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\mathbf{E}_{(y,i)}(g(Y_n,\xi_n)) = P^ng((y,i)) = P^nV((y,i)) + 1 \leqslant V(y,i) + 1 + \frac{b}{1-a} \quad \text{dla } (y,i) \in X.$$

Stąd, przyjmując $h(y,i) := V(y,i) + 1 + b(1-a)^{-1}$ dla $(y,i) \in X$, stwierdzamy, że warunek (C3) również zachodzi, co kończy dowód.

$\square$

3 Zastosowanie uzyskanych wyników do stochastycznego równania z zaburzeniem i poissonowskim

3.1 Miary losowe oraz proces punktowy Poissona

Niech będą dane: przestrzeń mierzalna (S, Σ_S) oraz przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, prob)$.

Definicja 3.1. Odwozorowanie $\mathbf{m} : \Sigma_S \times \Omega \to [0, \infty]$ nazywamy *miarą losową*, jeżeli:

i) dla każdego $A \in \Sigma_S$, odwzorowanie $\mathbf{m}(A, \cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ jest zmienną losową,

ii) dla każdego $\omega \in \Omega$, odwzorowanie $\mathbf{m}(\cdot, \omega) : \Sigma_S \to [0, \infty]$ jest miarą $\sigma-$ skończoną.

Definicja 3.2. Miarę losową $\mathbf{m} : \Sigma_S \times \Omega \to [0, \infty]$ nazywamy *miarą losową Poissona* z intensywnością $\lambda_{\mathbf{m}} : \Sigma_S \to [0, \infty]$, gdy:

i) dla każdego $A \in \Sigma_S$, zmienna losowa $\mathbf{m}(A, \cdot)$ ma rozkład Poissona z wartością średnią $\mathbb{E}[\mathbf{m}(A, \cdot)] = \lambda_{\mathbf{m}}(A)$, czyli

$$prob(\mathbf{m}(A, \cdot) = k) = \frac{\lambda_{\mathbf{m}}^k(A)}{k!} e^{-\lambda_{\mathbf{m}}(A)} \quad \text{dla każdego } k \in \mathbb{N}_0;$$

ii) dla dowolnych parami rozłącznych zbiorów $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_S$, zmienne losowe $\mathbf{m}(A_1, \cdot), \ldots, \mathbf{m}(A_n, \cdot)$ są niezależne.

Uwaga 3.3. W powyższej definicji przyjmujemy, że $0 \cdot \infty := 0$. W konsekwencji, gdy $\lambda_{\mathbf{m}}(A) = \infty$ dla $A \in \Sigma_S$, to $prob(\mathbf{m}(A, \cdot) = k) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$, a wtedy $\mathbf{m}(A, \cdot) = 0$ $prob-$p.n.

Rozważmy przestrzenie mierzalne (Θ, Σ_Θ) oraz $(S_\Theta, \Sigma_{S_\Theta})$, gdzie $S_\Theta := \mathbb{R}_+ \times \Theta$ oraz $\Sigma_{S_\Theta} := \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \Sigma_\Theta$.

Definicja 3.4. Odwzorowanie $p : D_p \to \Theta$ nazywamy *funkcją punktową*, jeżeli zbiór D_p jest przeliczalnym podzbiorem $(0, \infty)$. Zbiór wszystkich funkcji punktowych o wartościach w zbiorze Θ oznaczamy symbolem $\Pi(\Theta)$.

Z każdą funkcją punktową $p \in \Pi(\Theta)$ możemy związać miarę liczącą $N_p : \Sigma_{S_\Theta} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ daną wzorem

$$N_p([0, t] \times A) := \operatorname{card}\{s \in D_p : s \leqslant t, \ p(s) \in A\} \quad \text{dla } t > 0 \text{ oraz } A \in \Sigma_\Theta.$$

Dla każdej funkcji $\mathbf{p} : \Omega \to \Pi(\Theta)$ rozważmy odwzorowanie $\mathrm{N}_{\mathbf{p}} : \Sigma_{S_\Theta} \times \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ postaci

$$\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(B, \omega) := N_{\mathbf{p}(\omega)}(B) \quad \text{dla } B \in \Sigma_{S_\Theta} \text{ oraz } \omega \in \Omega.$$

W przypadku, gdy $B = [0, t] \times A$, gdzie $A \in \Sigma_\Theta$ i $t > 0$, zamiast $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}([0, t] \times A)$ będziemy pisać $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(t, A)$. Jeżeli odwzorowanie $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}$ jest miarą losową (Poissona), to funkcję $\mathbf{p} : \Omega \to \Pi(\Theta)$ nazywamy *procesem punktowym* (*Poissona*). Wówczas $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}$ nazywana jest *losową miarą liczącą* (*Poissona*). Przez intensywność punktowego procesu Poissona $\mathbf{p}$ rozumiemy intensywność miary Poissona $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}$, to jest $\lambda_{N_{\boldsymbol{p}}}(B) = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{p}}(B, \cdot)]$ dla $B \in \Sigma_{S_\Theta}$. Jeżeli

$$\lambda_{N_{\boldsymbol{p}}}([0, t] \times A) = t\kappa(A) \quad \text{dla } t > 0,\ A \in \Sigma_\Theta,$$

dla pewnej nieujemnej miary κ na Σ_Θ, to $\mathbf{p}$ nazywamy *stacjonarnym procesem Poissona*, o *mierze charakterystycznej* κ.

Dowód poniższego twierdzenia znajduje się w książce [33].

Twierdzenie 3.5. *Niech $\kappa : \Sigma_{S_\Theta} \to \mathbb{R}_+$ będzie dowolną miarą $\sigma-$skończoną. Wówczas na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, prob)$ istnieje stacjonarny proces punktowy Poissona $\mathbf{p} : \Omega \to \Pi(\Theta)$, dla którego κ jest miarą charakterystyczną. Jeżeli κ jest miarą skończoną, to proces ten można zdefiniować w taki sposób, że dla każdego $\omega \in \Omega$, $\mathbf{p}(\omega) : D_{\mathbf{p}(\omega)} \to \Theta$ oraz*

$$\mathbf{p}(\omega)(\overline{\tau}_n(\omega)) := \eta_n(\omega) \quad \text{dla } \omega \in \Omega,$$

gdzie $D_{\mathbf{p}(\omega)} = \{\overline{\tau}_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ oraz

i) $\overline{\tau}_n : \Omega \to \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}$, tworzą ściśle rosnący ciąg zmiennych losowych, a przyrosty $\Delta\overline{\tau}_n := \overline{\tau}_n - \overline{\tau}_{n-1}$, $\overline{\tau}_0 = 0$ są niezależne oraz mają jednakowy rozkład wykładniczy ze stałą $\kappa(\Theta)$;

ii) $\eta_n : \Omega \to \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}$, tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $\kappa/\kappa(\Theta)$ o tej własności, że $\{\overline{\tau}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są niezależne.

W szczególności, losowa miara licząca Poissona odpowiadająca procesowi $\mathbf{p}$ ma postać:

$$\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(t, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\overline{\tau}_n \leqslant t, \eta_n \in A\}} \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+,\ A \in \Sigma_\Theta, \tag{3.1}$$

oraz $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(t, A) < \infty$ prob $-$ p.n. dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $A \in \Sigma_\Theta$.

Jeżeli losowa miara licząca ma postać (3.1), to dla każdego $A \in \Sigma_\Theta$, zmienne $\overline{\tau}_n$ można postrzegać jako momenty skoków procesu $\{\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(t, A)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Rozważmy teraz przestrzeń Banacha $(H, ||\cdot||)$ oraz proces punktowy $\mathbf{p} : \Omega \to \Pi(\Theta)$. Ponadto, w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, prob)$ rozważmy taką filtrację $\{\mathcal{F}_t(\mathbf{p})\}_{t\in\mathbb{R}_+} \subset \mathcal{F}$, że $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(t, A)$ jest $\mathcal{F}_t(\mathbf{p})$ − mierzalne dla każdego $A \in \Sigma_\Theta$.

Symbolem $\mathcal{G}(\mathbf{p})$ oznaczmy zbiór wszystkich funkcji $F : \mathbb{R}_+ \times \Theta \times \Omega \to H$ spełniających warunki:

i) dla każdego $(\theta, \omega) \in \Theta \times \Omega$, odwzorowanie $t \to F(t, \theta, \omega)$ jest prawostronnie ciągłe,

ii) dla każdego $t > 0$, odwzorowanie $\Theta \times \Omega \ni (\theta, \omega) \to F(t, \theta, \omega)$ jest $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{F}_t(\mathbf{p})$ −mierzalne.

Dla każdego $t > 0$ oraz dowolnej funkcji $F \in \mathcal{G}(\mathbf{p})$ spełniającej warunek

$$\sum_{\{s\in D_{\mathbf{p}(\cdot)}:s\leqslant t\}} ||F(s, \mathbf{p}(\cdot)(s), \cdot)|| < \infty \quad prob \ - \ \text{p.n.},$$

możemy zdefiniować całkę z funkcji F względem miary $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}$ w następujący sposób

$$\int_0^t \int_\Theta F(s, \theta, \cdot)\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(ds, d\theta) := \sum_{\{s\in D_{\mathbf{p}(\cdot)}:s\leqslant t\}} F(s, \mathbf{p}(\cdot)(s), \cdot) \quad prob \ - \ \text{p.n.} \tag{3.2}$$

Dalej, zdefiniujmy całkę względem $\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(ds), d\theta)$, gdzie $(\Lambda(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem stochastycznym o wartościach rzeczywistych oraz ściśle rosnących trajektoriach, spełniającym warunki:

$$\Lambda(0) = 0 \text{ i } D_{\mathbf{p}(\omega)} \subset \{\Lambda(t)(\omega) : t > 0\} \quad \text{dla każdego } \omega \in \Omega.$$

W tym celu rozważmy odwzorowanie $\mathbf{p}_\Lambda : \Omega \to \Pi(\Theta)$, gdzie $\mathbf{p}_\Lambda(\omega) : D_{\mathbf{p}_\Lambda(\omega)} \to \Theta$, dane wzorem

$$\mathbf{p}_\Lambda(\omega)(\overline{s}) := \mathbf{p}(\omega)(\Lambda(\overline{s})(\omega)), \quad \overline{s} \in D_{\mathbf{p}_\Lambda(\omega)} := \bigcup_{s\in D_{\mathbf{p}(\omega)}} \{\overline{s} > 0 : \Lambda(\overline{s})(\omega) = s\} \tag{3.3}$$

dla każdego $\omega \in \Omega$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(t), A) &= \text{card}\,\{s \in D_{\mathbf{p}} : s \leqslant \Lambda(t), \mathbf{p}(s) \in A\} \\
&= \text{card}\,\{\overline{s} \in D_{\mathbf{p}_\Lambda} : \Lambda(\overline{s}) \leqslant \Lambda(t), \mathbf{p}(\Lambda(\overline{s})) \in A\} \\
&= \text{card}\,\{\overline{s} \in D_{\mathbf{p}_\Lambda} : \overline{s} \leqslant t, \mathbf{p}(\overline{s}) \in A\} = \mathrm{N}_{\mathbf{p}_\Lambda}(t, A).
\end{aligned}$$

Wobec tego, biorąc pod uwagę (3.2), dla funkcji $F \in \mathcal{G}(\mathbf{p}_\Lambda)$, naturalnym będzie przyjąć następującą definicję:

$$\int_0^t \int_\Theta F(s, \theta, \cdot)\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(ds), d\theta) := \sum_{\{\overline{s}\in D_{\mathbf{p}_{\Lambda(\cdot)}}:\overline{s}\leqslant t\}} F(\overline{s}, \mathbf{p}_\Lambda(\cdot)(\overline{s}), \cdot) \quad prob \ - \ \text{p.n.} \tag{3.4}$$

3.2 Opis modelu

Niech $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta z normą $||\cdot||$ indukowaną przez iloczyn skalarny $\langle\cdot|\cdot\rangle$, a Y dowolnym niepustym i domkniętym podzbiorem przestrzeni H. Dalej, rozważmy skończony zbiór $I = \{1, \ldots, N\}$ oraz macierz prawdopodobieństw złożoną z funkcji ciągłych $\pi_{ij} : Y \to [0,1],\ i, j \in I$. Ponadto, niech Θ będzie dowolnie ustalonym przedziałem zwartym, zaś $\kappa : \mathcal{B}(\Theta) \to [0,1]$ miarą probabilistyczną o ciągłej gęstości $h : \Theta \to \mathbb{R}_+$, tzn.

$$\kappa(A) := \int_A h(\theta)d\theta \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}(\Theta).$$

Załóżmy ponadto, że dane są odwzorowania $\sigma : Y \times \Theta \to Y,\ \lambda : Y \to (0,\infty)$ oraz $a : Y \times I \to Y$, które spełniają następujące warunki:

(W0) λ spełnia (2.2);

(W1) σ jest odwzorowaniem ciągłym;

(W2) istnieje $L_\sigma > 0$ taka, że

$$\int_\Theta ||\sigma(y_1,\theta) - \sigma(y_2,\theta)||\, \kappa(d\theta) \leqslant L_\sigma\, ||y_1 - y_2|| \quad \text{dla wszystkich } y_1, y_2 \in Y;$$

(W3) odwzorowania $a(\cdot, i),\ i \in I$, są ograniczone na zbiorach ograniczonych oraz spełniają warunki:

(W3.1) istnieje taka stała $\alpha < \underline{\lambda} - (2 + L_\sigma)\overline{\lambda}$, że każda funkcja $a(\cdot, i),\ i \in I$ jest $\alpha-$dysypatywna, to znaczy, dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$ zachodzi nierówność

$$\langle a(y_1, i) - a(y_2, i)|y_1 - y_2\rangle \leqslant \alpha\, ||y_1 - y_2||^2;$$

(W3.2) istnieje takie $T > 0$, że zbiór Y zawiera się w zbiorze wartości funkcji $\mathrm{id}_Y - ta(\cdot, i)$ dla wszystkich $t \in (0, T)$ oraz $i \in I$;

(W4) istnieje taka stała $L_\lambda > 0$, że

$$|\lambda(y_1) - \lambda(y_2)| \leqslant L_\lambda\, ||y_1 - y_2|| \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y;$$

(W5) istnieje taka stała $L_\pi > 0$, że

$$\sum_{j\in I} |\pi_{ij}(y_1) - \pi_{ij}(y_2)| \leqslant L_\pi\, ||y_1 - y_2|| \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y,\ i \in I;$$

(W6) istnieją takie stałe $\delta_\pi > 0$ oraz $\delta_h > 0$, że

$$\sum_{j\in I} \min\{\pi_{i_1 j}(y_1), \pi_{i_2 j}(y_2)\} \geqslant \delta_\pi \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y,\ i_1, i_2 \in I$$

oraz

$$\kappa(\{\theta \in \Theta : ||\sigma(y_1,\theta) - \sigma(y_2,\theta)|| \leqslant\ ||y_1 - y_2||\}) \geqslant \delta_h \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y.$$

Rozważmy stochastyczne równanie różniczkowe postaci

$$dY(t) = a\left(Y(t), \xi(t)\right) dt + \int_\Theta \sigma(Y(t),\theta) \mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(dt), d\theta) \tag{3.5}$$

z warunkiem początkowym

$$Y(0) = Y_0, \tag{3.6}$$

gdzie proces $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ przyjmuje wartości w przestrzeni Y oraz

$$\begin{aligned} &\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(Y(s))ds, \\ &\xi(t) = \xi_n \quad \text{jeżeli tylko } \mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(t),\Theta) = n,\ n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ dla } t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Zakładamy, że $Y_0, \mathbf{p}$ oraz ξ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, są zmiennymi losowymi określonymi na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, prob)$ w następujący sposób:

1. $(Y_0, \xi_0) : \Omega \to Y \times I$ jest zmienną losową o ustalonym rozkładzie;

2. $\mathbf{p} : \Omega \to \Pi(\Theta)$ jest stacjonarnym procesem Poissona z miarą charakterystyczną κ. Zgodnie z twierdzeniem 3.5 możemy przyjąć, że proces ten wyznaczony jest przez ciągi zmiennych losowych $\{\overline{\tau}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ oraz $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełniające warunki (i) i (ii) (podane w wypowiedzi tego twierdzenia), w taki sposób, że

$$\mathbf{p}(\omega)(\overline{\tau}_n(\omega)) = \eta_n(\omega) \quad \text{dla } \omega \in \Omega. \tag{3.8}$$

   W szczególności $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wówczas ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościach w przedziale Θ oraz o wspólnej gęstości h;

3. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze I oraz o rozkładach warunkowych

$$prob(\xi_n = j | Y(\tau_n) = y, \xi_{n-1} = i) = \pi_{ij}(y) \quad \text{dla } i, j \in I,\ y \in Y,$$

   gdzie $\tau_n : \Omega \to \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}$, są momentami skoków procesu $\{N_{\mathbf{p}_\Lambda}(t,\cdot)\}_{t\geqslant 0}$ odpowiadającym procesowi Poissona $\mathbf{p}_\Lambda$ postaci (3.3), czyli

$$\Lambda(\tau_n) = \overline{\tau}_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.9}$$

Przez rozwiązanie problemu (3.5)−(3.7) będziemy rozumieć taki proces $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ o własności cadlag (tzn. o prawostronnie ciągłych trajektoriach posiadających w każdym punkcie lewostronne granice), że

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t a(Y(s), \xi(s))ds + \int_0^t \int_\Theta \sigma(Y(s-), \theta)\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(ds), d\theta), \tag{3.10}$$

gdzie $\{\Lambda(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ oraz $\{\xi(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ spełniają warunki (3.7).

Ponieważ τ_n, $n \in \mathbb{N}$, są momentami skoków procesu $\{N_{\mathbf{p}_\Lambda}(t,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ oraz $N_{\mathbf{p}}(t,\cdot) = N_{\mathbf{p}_\Lambda}(t,\cdot)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$, więc warunek (3.7), określający proces $\{\xi(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, można równoważnie zapisać w postaci:

$$\xi(t) = \xi_n \quad \text{dla } t \in [\tau_n, \tau_{n+1}),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.11}$$

Mając na uwadze definicję procesu p_Λ, wyrażoną poprzez formułę (3.3), oraz tożsamości (3.8) i (3.9) widzimy, że

$$\begin{aligned} &D_{\mathbf{p}_\Lambda(\omega)} = \{\tau_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}, \\ &\mathbf{p}_\Lambda(\omega)(\tau_n(\omega)) = \mathbf{p}(\omega)(\overline{\tau}_n(\omega)) = \eta_n(\omega) \quad \text{dla } \omega \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wobec tego, stosując definicję całki (3.4) dla $F(s,\theta,\omega) := \sigma(Y(s-)(\omega),\theta)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Theta \sigma(Y(s-), \theta)\mathrm{N}_{\mathbf{p}}(\Lambda(ds), d\theta) &= \sum_{\{\overline{s}\in D_{\mathbf{p}_\Lambda}:\overline{s}\leqslant t\}} \sigma(Y(\overline{s}-), \mathbf{p}_\Lambda(\overline{s})) \\ &= \sum_{\{n\in\mathbb{N}:\tau_n\leqslant t\}} \sigma(Y(\tau_n-), \eta_n). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dla każdego $i \in I$ rozważmy teraz problem Cauchy'ego postaci

$$v'(t) = a(v(t), i), \quad v(0) = y, \quad \text{gdzie } y \in Y. \tag{3.13}$$

Założenie $(W3)$ gwarantuje, że dla każdego $i \in I$ oraz $y \in Y$ zagadnienie (3.13) ma dokładnie jedno rozwiązanie $t \to S_i(t,y)$, a generowany przezeń potok S_i spełnia warunki:

$$||S_i(t,y_1) - S_i(t,y_2)|| \leqslant e^{\alpha t}\,||y_1 - y_2|| \quad \text{dla } y_1, y_2 \in Y, \tag{3.14}$$

$$||S_i(t,y) - y|| \leqslant t\,||a(y,i)|| \quad \text{dla } y \in Y. \tag{3.15}$$

Stwierdzenie to jest konsekwencją pewnych ogólnych rezultatów odnoszących się do dysypatywnych równań różniczkowych w przestrzeniach Hilberta (lub ogólniej, w przestrzeniach refleksywnych). Jego uzasadnienie może stanowić [17, Theorem 5.11], gwarantujące istnienie i jedyność rozwiązań dla pewnej klasy równań dysypatywnych, w połączeniu z [17, Theorem

5.3] (twierdzenie Crandalla–Liggetta), które zapewnia, iż potoki opisujące ewolucję równań tej klasy wykazują pewne szczególne właściwości, których konsekwencją są wyżej podane warunki (3.14) i (3.15). Poniżej przytaczamy twierdzenie, które stanowi połączenie tych dwóch rezultatów.

Twierdzenie 3.6. *Niech $A : Y \to H$ będzie operatorem η −dysypatywnym dla pewnego $\eta \leqslant 0$, tzn.*

$$\langle Ay_1 - Ay_2 | y_1 - y_2 \rangle \leqslant \eta ||y_1 - y_2||^2 \quad \text{dla dowolnych} \quad y_1, y_2 \in Y.$$

Ponadto, załóżmy, że dla pewnego $T > 0$ zachodzi

$$Y \subset (\mathrm{id}_Y - tA)(Y) \quad \text{dla wszystkich } t \in (0, T).$$

Wówczas, dla każdego $y \in Y$, problem Cauchy'ego

$$u'(t) = Au(t), \;\; t \in \mathbb{R}_+, \quad u(0) = y,$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $u_y : \mathbb{R}_+ \to Y$, a generowany przez niego potok $S : \mathbb{R}_+ \times Y \to Y$, dany wzorem $S(t, y) = u_y(t)$, spełnia warunki:

$$||S(t, x) - S(t, y)|| \leqslant e^{\eta t} \, ||x - y|| \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}_+, \; x, y \in Y$$

oraz

$$||S(t, y) - S(s, y)|| \leqslant (t - s) e^{\eta s} \, ||Ay||$$

dla $s \in [0, t]$ oraz $y \in Y$.

Biorąc pod uwagę powyższe rozumowanie wykażemy, że proces postaci

$$Y(t) := S_{\xi_n}(t - \tau_n, Y(\tau_n)) \quad \text{dla } t \in [\tau_n, \tau_{n+1}), \tag{3.16}$$

gdzie

$$Y(\tau_n) := Y(\tau_n -) + \sigma(Y(\tau_n -), \eta_n). \tag{3.17}$$

jest rozwiązaniem problemu (3.5) – (3.7). W tym celu symbolem $U(t)$ oznaczmy prawą stronę (3.10). Rozumując indukcyjnie, przypuśćmy, że równość ta jest spełniona dla pewnego, dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas korzystając z założenia indukcyjnego oraz (3.12) otrzymujemy

$$U(\tau_{n+1}) = Y(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} a(Y(s), \xi(s))ds + \sigma(Y(\tau_{n+1}-), \eta_{n+1}).$$

Korzystając z (3.11) oraz podstawiając $u = s - \tau_n$ mamy

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} a(Y(s),\xi(s))ds &= \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} a(S_{\xi_n}(s-\tau_n, Y(\tau_n)),\xi_n)\, ds \\
&= \int_0^{\Delta\tau_{n+1}} a(S_{\xi_n}(u, Y(\tau_n)),\xi_n)du \\
&= \int_0^{\Delta\tau_{n+1}} \frac{d}{du} S_{\xi_n}(u, Y(\tau_n))du \\
&= S_{\xi_n}(\Delta\tau_{n+1}, Y(\tau_n)) - S_{\xi_n}(0, Y(\tau_n)) = Y(\tau_{n+1}-) - Y(\tau_n),
\end{aligned}$$

co w konsekwencji daje

$$U(\tau_{n+1}) = Y(\tau_{n+1}-) + \sigma(Y(\tau_{n+1}-),\eta_{n+1}) = Y(\tau_{n+1}).$$

Ustalmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$. Wówczas, dla każdego $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
U(t) &= U(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{t} a(Y(s),\xi(s))ds = Y(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{t} a(S_{\xi_n}(s-\tau_n, Y(\tau_n)),\xi_n)ds \\
&= Y(\tau_n) + \int_0^{t-\tau_n} a(S_{\xi_n}(u, Y(\tau_n)),\xi_n)du \\
&= Y(\tau_n) + \int_0^{t-\tau_n} \frac{d}{du} S_{\xi_n}(u, Y(\tau_n))du = S_{\xi_n}(t-\tau_n, Y(\tau_n)) = Y(t).
\end{aligned}$$

Stąd $Y(t)$ spełnia równanie (3.10) dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ i tym samym proces $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.5)–(3.7).

3.3 Ergodyczność operatora skoku związanego z pewną wersją stochastycznego równania Poissona

Rozważmy proces $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ zadany przez (3.16) i (3.17), stanowiący rozwiązanie problemu (3.5) – (3.7), oraz ciąg $\{(Y_n,\xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ opisujący stany procesu $\{(Y(t),\xi(t))\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ tuż po skokach, tj.

$$Y_n = Y(\tau_n), \quad \xi(t) = \xi_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.18}$$

Dodatkowo przyjmijmy, że zmienne losowe Y_0, ξ_0, τ_n, η_n oraz ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, spełniają założenia warunkowej niezależności odpowiadające tym, wyszczególnionym na początku rozdziału 2. Jak nietrudno sprawdzić, ciąg $\{(Y_n,\xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest wówczas jednorodnym łańcuchem Markowa o przestrzeni fazowej $X := Y \times I$. Naszym celem, stanowiącym zwieńczenie rozdziału 3., będzie wykazanie, iż warunki $(W0)$ – $(W6)$, zdefiniowane w paragrafie 3.2, zapewniają istnienie rozkładu stacjonarnego oraz geometryczną ergodyczność operatora przejścia tego łańcucha. W realizacji tego celu, posłuży nam twierdzenie 2.6.

Niech P oznacza funkcję przejścia wspomnianego łańcucha Markowa $\{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wykażemy najpierw, że P pokrywa się z jądrem stochastycznym (2.4), stanowiącym przedmiot rozważań w poprzednich rozdziałach pracy, zdefiniujmy

$$q_\theta(y) := y + \sigma(y, \theta) \quad \text{oraz} \quad p_\theta(y) := h(\theta) \quad \text{dla } y \in Y,\ \theta \in \Theta. \tag{3.19}$$

Oczywiście Y_n, $n \in \mathbb{N}_0$ spełniają wówczas równość

$$Y_n = q_{\eta_n}(S_{\xi_{n-1}}(\Delta\tau_n, Y_{n-1})) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Mając na uwadze konstrukcję układu dynamicznego zdefiniowanego w rozdziale drugim, wystarczy zatem pokazać, że zachodzi warunek (2.3). W tym celu, zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} L(\Delta\tau_{n+1}, Y_n, \xi_n) &= \int_0^{\Delta\tau_{n+1}} \lambda(S_{\xi_n}(s, Y_n))ds = \int_{\tau_n}^{\Delta\tau_{n+1}} \lambda(S_{\xi_n}(u - \tau_n, Y_n))du \\ &= \int_{\tau_n}^{\Delta\tau_{n+1}} \lambda(Y(u))du = \Lambda(\tau_{n+1}) - \Lambda(\tau_n) = \Delta\overline{\tau}_{n+1}. \end{aligned}$$

Wobec tego, onaczywszy przez $H(\cdot, y, i)$ funkcję odwrotną do $L(\cdot, y, i) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (dla każdej pary $(y, i) \in X$), możemy napisać:

$$\Delta\tau_{n+1} = H(\Delta\overline{\tau}_{n+1}, Y_n, \xi_n) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_0.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} prob(\Delta\tau_{n+1} \leqslant t | Y_n = i, \xi_n = y) &= prob(H(\Delta\overline{\tau}_{n+1}, Y_n, \xi_n) \leqslant t | Y_n = i, \xi_n = y) \\ &= prob(\Delta\overline{\tau}_{n+1} \leqslant L(t, y, i)) = 1 - e^{-L(t,y,i)}, \end{aligned}$$

co ostatecznie uzasadnia, że funkcja przejścia łańcucha $\{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ w istocie ma postać (2.4) i tym samym łańcuch ten można traktować jako szczególny przypadek modelu rozważanego w poprzedniej części pracy.

Twierdzenie 3.7. *Niech funkcje $\sigma : Y \times \Theta \to Y$, $\lambda : Y \to (0, \infty)$, $a : X \to Y$ spełniają założenia $(W0) - (W6)$ oraz niech $\{(Y(t), \xi(t))\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie procesem stochastycznym stanowiącym rozwiązanie problemu* (3.5) – (3.7)*. Ponadto, rozważmy łańcuch Markowa $\{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadany przez* (3.18) *oraz oznaczmy przez P operator przejścia tego łańcucha. Wówczas, istnieje dokładnie jedna miara niezmiennicza $\mu_* \in \mathcal{M}_1(X)$ dla operatora $(\cdot)P$. Ponadto, $\mu_* \in \mathcal{M}_1^{\rho_c,1}(X)$ oraz (dla dostatecznie dużych c) istnieje punkt $x_* \in X$ i takie stałe $C \in \mathbb{R}$, $\beta \in [0, 1)$, że*

$$||\mu P^n - \mu_*||_{FM} \leqslant C\beta^n \left(\int_X \rho_c(x_*, x)(\mu + \mu_*)(dx) + 1 \right)$$

dla każdej $\mu \in \mathcal{M}_1^{\rho_c,1}(X)$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Niech funkcje $p(\theta,\cdot)$ i q_θ, $\theta\in\Theta$, będą zadane przez (3.19). Zważywszy na twierdzenie 2.6, wystarczy pokazać, że warunki $(A1)-(A5)$ i $(A2')$ zachodzą dla stałych $L, L_q, \underline{\lambda}, \overline{\lambda}, \alpha$ spełniających nierówność (2.7), zaś π_{ij}, $i,j\in I$, oraz p spełniają warunek (2.32). Jak już wcześniej wspomnieliśmy, twierdzenie 3.6 wraz z założeniem $(W3)$ gwarantują, że potoki S_i, $i\in I$, generowane przez zagadnienie początkowe postaci (3.13), spełniają warunki (3.14) i (3.15). Stąd łatwo wywnioskować, że warunki $(A2)$ i $(A2')$ zachodzą dla $L=1$, $\alpha<\underline{\lambda}-(1+L_\sigma)\overline{\lambda}$ oraz $\mathcal{L}$ danego wzorem $\mathcal{L}(y):=\max_{i\in I}||a(y,i)||$.

Wykażemy teraz, że spełniony jest warunek $(A1)$. Na podstawie $(W1)$, czyli ciągłości σ, możemy zdefiniować stałą:

$$M:=\sup_{\theta\in\Theta}||\sigma(y_*,\theta)||<\infty \quad \text{dla dowolnie ustalonego } y_*\in Y.$$

Korzystając następnie z $(W2)$ wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}&\int_\Theta ||q_\theta(S_i(t,y_*))-y_*||\,h(\theta)d\theta=\int_\Theta ||S_i(t,y_*)+\sigma(S_i(t,y_*),\theta)-y_*||\,h(\theta)d\theta\\ &\leqslant\int_\Theta ||S_i(t,y_*)-y_*||\,h(\theta)d\theta+\int_\Theta ||\sigma(S_i(t,y_*),\theta)-\sigma(y_*,\theta)||\,h(\theta)d\theta\\ &+\int_\Theta ||\sigma(y_*,\theta)||\,h(\theta)d\theta\leqslant t\,||a(y_*,i)||+L_\sigma t\,||a(y_*,i)||+M\\ &\leqslant(1+L_\sigma)\max_{i\in I}||a(y_*,i)||\,t+M \quad \text{dla każdego } i\in I.\end{aligned}$$

Wobec tego, kładąc $K:=(1+L_\sigma)\max_{i\in I}||a(y_*,i)||$, otrzymujemy

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_\Theta ||q_\theta(S_i(t,y_*))-y_*||\,h(\theta)d\theta dt\leqslant\frac{K}{\underline{\lambda}^2}+\frac{M}{\underline{\lambda}}<\infty \quad \text{dla każdego } i\in I,$$

co dowodzi, iż spełniony jest warunek $(A1)$.

Na podstawie założenia $(W2)$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\int_\Theta ||q_\theta(y_1)-q_\theta(y_2)||\,h(\theta)d\theta\leqslant||y_1-y_2||+\int_\Theta ||\sigma(y_1,\theta)-\sigma(y_2,\theta)||\,\kappa(d\theta)\\ (1+L_\sigma)\,||y_1-y_2||,\end{aligned}$$

co pokazuje, iż (A3) zachodzi ze stałą $L_q=1+L_\sigma$.

Założenia $(W4)$ i $(W5)$ są równoważne odpowiednio warunkom $(A4)$ i (A5).

Korzystając z $(W6)$ oraz z faktu, że

$$\begin{aligned}&\{\theta\in\Theta:||\sigma(y_1,\theta)-\sigma(y_2,\theta)||\leqslant L_\sigma\,||y_1-y_2||\}\\ \subset&\{\theta\in\Theta:||q_\theta(y_1)-q_\theta(y_2)||\leqslant L_q\,||y_1-y_2||\}\end{aligned}$$

wnioskujemy, że spełniony jest również warunek (2.32). Ponadto, mając na uwadze górne ograniczenie stałej α, określone przez warunek $(W3.1)$, wnosimy, że

$$\overline{\lambda}LL_q=\overline{\lambda}(1+L_\sigma)+\alpha<\underline{\lambda},$$

co kończy dowód. $\square$

Literatura

[1] Benaim M., Le Borgne S., Malrieu F., Zitt P.-A. Qualitative properties of certain piecewise deterministic Markov processes. *Annales de l'Institut Henri Poincar´e – Probabilit´es et Statistiques*, 51:1040–1075, 2015.

[2] Billingsley P. *Convergence of Probability Measures.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[3] Bogachev V. *Measure Theory*, volume 2. Springer, 2007.

[4] Cloez B., Hairer M. *Exponential ergodicity for Markov processes with random switching.* Bernoulli, 2015.

[5] Costa O., Dufour F. Stability and ergodicity of piecewise deterministic Markov processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47:1053–1077, 2008.

[6] Czapla D., Horbacz K. Equicontinuity and Stability Properties of Markov Chains Arising from Iterated Function Systems on Polish Spaces. *Stochastic Analysis and Applications*, 32:1–29, 2014.

[7] Czapla D., Horbacz K., Wojewódka-Ściążko H. The Strassen Invariance Principle for Certain Non-Stationary Markov-Feller Chains. *arXiv: 1810.07300*, 2018.

[8] Czapla D., Horbacz K., Wojewódka-Ściążko H. Ergodic properties of some piecewise-deterministic Markov process with application to gene expression modelling. *doi: 10.1016/j.spa.2019.08.006*, praca przyjęta do druku w *Stochastic Processes and their Applications*, 2019.

[9] Czapla D., Horbacz K., Wojewódka H. A useful version of the central limit theorem for a general class of Markov Chains. *arXiv: 1804.09220*, 2018.

[10] Czapla D., Kubieniec J. Exponential ergodicity of some Markov dynamical system with application to a Poisson driven stochastic differential equation. *Dynamical Systems: An International Journal*, 34:130–156, 2019.

[11] Dudley R. Convergence of Baire Measures. *Studia Mathematica*, 27:251–268, 1966.

[12] Hairer M. Exponential mixing properties of stochastic PDEs through asymptotic coupling. *Probability Theory and Related Fields*, 124:345–380, 2002.

[13] Hille S., Horbacz K., Szarek T. Existence of a unique invariant measure for a class of equicontinuous Markov operators with application to a stochastic model for an autoregulated gene. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 23:171–217, 2016.

[14] Horbacz K. Invariant measures related with randomly connected Poisson driven differential equations. *Annales Polonici Mathematici*, 79:31–44, 2002.

[15] Horbacz K. Invariant measures for random dynamical systems. *Dissertationes Mathematicae*, 451:1–63, 2008.

[16] Horbacz K., Ślęczka M. Law Of Large Numbers For Random Dynamical Systems. *Journal of Statistical Physics*, 162:671–684, 2016.

[17] Ito K., Kappel F. Evolution Equations and Approximations. *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, 61, 2002.

[18] Kapica R., Ślęczka M. Random iteration with place dependent probabilities. *arXiv:1107.0707v3*, 2017, praca przyjęta do druku w *Probability and Mathematical Statistics.*

[19] Kazak J. Piecewise-deterministic Markov processes. *Annales Polonici Mathematici*, 109:279–296, 2013.

[20] Kubieniec J. Random dynamical systems with jumps and with a function type intensity. *Annales Mathematicae Silesianae*, 30:63–87, 2016.

[21] Lasota A. From fractals to stochastic differential equations, in: Chaos — The Interplay Between Stochastic and Deterministic Behaviour. *Lecture Notes in Physics*, 457:235–255, 1995.

[22] Lasota A. *Układy dynamiczne na miarach.* Wydawnictwo UŚ, Katowice, 2008.

[23] Lasota A., Mackey M. C. Cell division and the stability of cellular populations. *Journal of Mathematical Biology*, 38:241–261, 1999.

[24] Lasota A., Myjak M. Semifractals on Polish spaces. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, 46:179–196, 1998.

[25] Lasota A., Szarek T. Lower bound technique in the theory of a stochastic differential equation. *Journal of Differential Equations*, 231:513–533, 2006.

[26] Lasota A., Traple J. Invariant measures related with Poisson driven stochastic differential equation. *Stochastic Processes and their Applications*, 106:81–93, 2003.

[27] Lasota A., Traple J. Dimension of invariant sets for mappings with the squeezing property. *Chaos Solitons & Fractals*, 28:1271–1280, 2006.

[28] Lasota A., Yorke J. Lower bound technique for Markov operators and iterated function systems. *Random Comput. Dynamics*, 2:41–77, 1994.

[29] Lipniacki T., Paszek P., Marciniak-Czochra A., Brasier A. R., Kimmel M. Transcriptional stochasticity in gene expression. *Journal of Theoretical Biology*, 238:348–367, 2006.

[30] Mackey M. C., Tyran-Kamińska M., Yvinec R. Dynamic behavior of stochastic gene expression models in the presence of bursting. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73:1830–1852, 2013.

[31] Meyn S.P., Tweedie R.L. *Markov chains and stochastic stability.* Springer-Verlag, London, 1993.

[32] Shirikyan A. A version of the law of large numbers and applications, in: Probabilistic Methods in Fluids. *Proceedings of the Swansea 2002 Workshop*, pages 263–271, 2003.

[33] Situ R. *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications*. Springer, 2005.

[34] Szarek T. The stability of Markov operators on Polish spaces. *Studia Mathematica*, 143:145–152, 2000.

[35] Szarek T. Invariant measures for Markov operators with applications to function systems. *Studia Mathematica*, 154:207–222, 2003.

[36] Szarek T. Invariant measures for nonexpansive Markov operators on Polish spaces. *Dissertationes Mathematicae*, 415:1–62, 2003.

[37] Szarek T. Feller processes on nonlocally compact spaces. *The Annals of Probability*, 34:1849–1863, 2006.

[38] Szarek T., Worm D.T.H. Ergodic measures of Markov semigroups with the e-property. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 32:1117–1135, 2012.

[39] Werner I. Contractive Markov systems. *Journal of the London Mathematical Society*, 71:236–258, 2005.